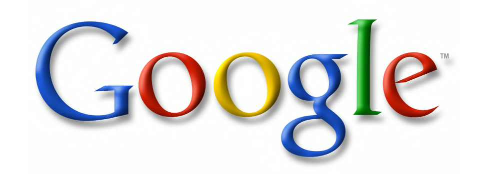


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

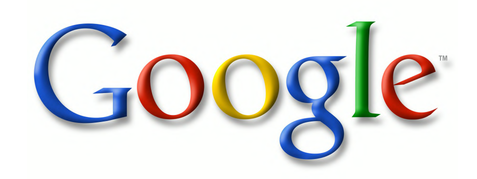
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

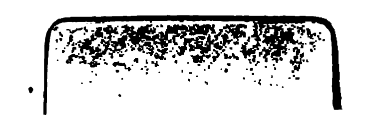
3310
192

Phys 3310.192

[redacted]



HARVARD
COLLEGE
LIBRARY



A THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE MAXWELL

ET SON APPLICATION AUX CORPS MOUVANTS

PAR

H. A. LORENTZ

Professeur à l'Université de Leide.

(Extrait des *Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, T. XXV.)

LEIDE,
E. J. BRILL.
1892

LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DE MAXWELL ET SON APPLICATION AUX CORPS MOUVANTS.

PAR

H. A. LORENTZ.

Introduction.

Hypothèses fondamentales.

§ 1. Dans un des plus beaux chapitres de son Traité de l'électricité et du magnétisme, *Maxwell* fait voir comment les principes de la mécanique peuvent servir à élucider les questions d'électrodynamique et la théorie des courants induits, sans qu'il soit nécessaire de pénétrer le secret du mécanisme qui produit les phénomènes. L'illustre savant se borne à un petit nombre d'hypothèses, que tous les physiciens connaissent et dont on me permettra de rappeler ici les principales.

Les anciennes théories opéraient avec un ou deux fluides électriques, qui seraient en repos dans les phénomènes électrostatiques et dont le déplacement constituerait un courant. *Maxwell* admet également que les systèmes dont on s'occupe en électrostatique se trouvent en repos et que ceux où il y a des courants sont le siège d'un véritable mouvement; mais, selon lui, ce dernier n'est pas simplement le déplacement d'une matière électrique et ce qui se passe dans les fils conducteurs ne constitue pas le mouvement entier.

C'est là un point d'une importance fondamentale. On sait que *Maxwell*, en suivant la voie tracée par *Faraday*, cherche à expliquer par l'intervention du milieu toutes les actions qui

semblent s'exercer à distance, le milieu étant tantôt l'éther qui transmet les vibrations de la lumière, tantôt un corps pondérable. Si des fils de métal sont parcourus par des courants électriques, les particules du milieu ambiant sont animées d'un certain mouvement, que j'appellerai le *mouvement électromagnétique* et qui consiste probablement en une rotation autour des lignes de force magnétique. Selon *Maxwell*, la force vive de ce mouvement est précisément l'énergie electromagnétique dont, indépendamment de toute théorie, les expériences ont révélé l'existence et fixé la valeur et que la théorie répartit d'une manière déterminée sur les différentes parties de l'espace.

Remarquons, dès à présent, que dans un même élément de volume un courant électrique et un mouvement électromagnétique peuvent exister simultanément.

§ 2. Dans une autre hypothèse de *Maxwell* il est question des liaisons entre les différentes parties du système mobile. Figurons-nous un certain nombre de circuits linéaires qui se déplacent d'une manière quelconque et supposons pour un moment qu'il n'y ait aucun courant électrique. Si les fils conducteurs sont entourés d'un milieu pour lequel ils ne sont pas parfaitement perméables, leur mouvement donnera lieu à un déplacement de ce milieu; en outre, dans une théorie générale, il faudrait admettre que des corps quelconques, placés dans le voisinage des conducteurs, peuvent se mouvoir indépendamment de ces derniers. Toutefois, pour simplifier, je me bornerai au cas où, tant qu'il n'y a pas de courants, le mouvement du système entier est connu, lorsque celui des circuits est donné.

Si maintenant, sans rien changer au mouvement des conducteurs, on y établit des courants électriques, les choses se compliqueront davantage: outre les mouvements qui existaient déjà, ceux que nous avons appelés „électromagnétiques" prendront naissance. Je désignerai par P les points matériels qui prennent part à ce nouveau phénomène et je supposerai que, pour un certain moment t_0, on connaisse la position de chaque

circuit et celle de tous les points P. Cela posé, l'hypothèse de *Maxwell* peut être exprimée en ces termes:

En vertu des liaisons qui existent dans le système, les positions des points P à un instant ultérieur t sont entièrement déterminées dès qu'on connaît les nouvelles positions des circuits et, pour chacun d'eux, la quantité d'électricité qui, entre les moments t_0 et t, a traversé une section.

Cette quantité d'électricité est ici regardée comme une somme algébrique, les signes + et — étant employés pour indiquer si l'électricité se déplace dans un sens ou dans l'autre. Lorsque i est l'intensité d'un courant prise avec un signe qui en détermine la direction, la quantité dont je viens de parler peut être représentée par l'intégrale $\int_{t_0}^{t} i\,dt$ et l'hypothèse elle-même revient à ce qui suit:

(A). Si deux mouvements différents du système s'accordent en ce qui concerne la position primitive du système tout entier, la position finale des circuits conducteurs et les valeurs des intégrales $\int i\,dt$, ces deux mouvements conduiront aux mêmes positions finales des points P.

Un état de repos peut être envisagé comme un cas particulier de mouvement. Or, un tel état, sans aucun courant électrique, peut être substitué à l'un des deux mouvements dont il vient d'être question; pour que cela soit permis, il suffit que dans l'autre mouvement toutes les intégrales $\int i\,dt$ s'annulent et que ce mouvement reconduise les circuits à leurs positions initiales. On arrive ainsi à cette conséquence:

(B). Si, à la suite de déplacements quelconques, tous les circuits se retrouvent dans leurs positions primitives et que, dans le cours de ces déplacements, chaque section ait été traversée dans les deux directions opposées par des quantités égales d'électricité — c'est-à-dire si pour chaque circuit $\int i\,dt = 0$

— toutes les particules qui prennent part aux mouvements électromagnétiques se retrouveront dans leurs positions primitives.

Du reste, cet énoncé n'est pas seulement une conséquence de l'hypothése (A); l'inverse a également lieu. Un raisonnement bien simple conduit à la proposition (A) si on prend pour point de départ l'assertion (B). Pour abréger ce raisonnement, je désignerai par la lettre U les positions des circuits et par W celles des points P.

Remarquons d'abord que la proposition (B) conduit immédiatement au corollaire suivant: Si, dans un certain mouvement, les circuits et les points P ont les positions initiales U et W et les positions finales U' et W', tandis que les intégrales $\int i\,d\,t$ ont les valeurs ε, le renversement du mouvement des circuits, c'est-à-dire le déplacement $U' \rightarrow U$, lorsqu'il est accompagné de courants tels que $\int i\,d\,t = -\varepsilon$, impliquera nécessairement le déplacement $W' \rightarrow W$.

Cela posé, on peut considérer deux mouvements I et II qui commencent avec les mêmes positions U_0 et W_0 et qui aboutissent, le premier aux positions U_1 et W_1, le second aux positions U_1 et W'_1, l'intégrale $\int i d t$ ayant, pour chaque circuit, la même valeur ε dans les deux cas. Or, en commençant par les positions U_1 et W_1, on peut d'abord renverser le mouvement I, ce qui rétablit les positions U_0 et W_0, et on peut faire suivre le mouvement II, ce qui conduit aux positions U_1 et W_1'. Les circuits se retrouvent alors dans leurs positions primitives U_1 et une section d'un d'entre eux a été traversée d'abord par la quantité d'électricité $-\varepsilon$ et ensuite par la quantité $+\varepsilon$. La proposition (B) exige donc que les positions W_1 et W_1' coïncident et voilà précisément ce que *Maxwell* suppose dans la proposition (A).

Cette hypothèse, qu'on peut à volonté présenter sous l'une ou l'autre des formes (A) et (B), a un défaut. C'est qu'il est

difficile d'imaginer un système matériel dans lequel les choses se passent de la manière supposée. Cependant, elle ne semble contenir rien d'impossible. C'est du reste un point sur lequel je reviendrai.

Après avoir posé les principes que je viens de résumer, *Maxwell* applique les équations de *Lagrange*; il arrive ainsi à des formules bien connues pour les forces électrodynamiques et pour l'induction des courants. Les forces extérieures qui entrent en jeu sont d'abord des forces ordinaires qu'on fait agir sur la matière pondérable des conducteurs, en second lieu les forces électromotrices telles qu'elles existent dans les éléments voltaïques et les couples thermoélectriques, enfin la résistance qui s'oppose au mouvement de l'électricité et qui peut être comparée à un frottement.

§ 3. Les équations qui déterminent les mouvements de l'électricité dans des corps à trois dimensions ne résultent pas, dans le livre de *Maxwell*, d'une application directe des lois de la mécanique; elles reposent sur les résultats qui ont été obtenus pour les conducteurs linéaires.

De plus, elles n'ont pas la forme la plus simple que l'on puisse leur donner; il est même difficile d'y voir clair, à cause d'un certain nombre de quantités auxiliaires qu'on en peut éliminer. C'est ce qu'a remarqué, il y a déjà quelques années, M. *Heaviside* [1]). Récemment, M. *Hertz* [2]) a repris le problème; il a établi, d'abord pour des systèmes en repos, et ensuite pour des corps mobiles, un système d'équations, de forme très-simple, qui peuvent rendre compte des phénomènes observés.

Il y a une différence essentielle entre la méthode de M.

[1]) Heaviside, *On the self-induction of wires*, dans *Phil. Mag.*, *5th ser.*, *vol.* 22, *p.* 118 (1886).

[2]) Hertz, *Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für ruhende Körper*, dans *Wied. Ann.*, *Bd.* 40, *p.* 577 (1890); *Ueber die Grundgleichungen der Electrodynamik für bewegte Körper*, *Wied. Ann.*, *Bd.* 41, *p.* 369 (1890).

Hertz et celle de *Maxwell*. M. *Hertz* ne s'occupe guère d'un rapprochement entre les actions électromagnétiques et les lois de la mécanique ordinaire. Il se contente d'une description succincte et claire, indépendante de toute idée préconçue sur ce qui se passe dans le champ électromagnétique. Inutile de dire que cette méthode a ses avantages.

Cependant, on est toujours tenté de revenir aux explications mécaniques. C'est pourquoi il m'a semblé utile d'appliquer directement au cas le plus général la méthode dont *Maxwell* a donné l'exemple dans son étude des circuits linéaires. J'avais encore un autre motif pour entreprendre ces recherches. Dans le mémoire où M. *Hertz* traite des corps en mouvement, il admet que l'éther qu'ils contiennent se déplace avec eux. Or, des phénomènes optiques ont depuis longtemps démontré qu'il n'en est pas toujours ainsi. Je désirais donc connaître les lois qui régissent les mouvements électriques dans des corps qui traversent l'éther sans l'entraîner, et il me semblait difficile d'atteindre ce but sans avoir pour guide une idée théorique. Les vues de *Maxwell* peuvent servir de fondement à la théorie cherchée. Toutefois, avant d'aborder les questions qui m'intéressaient plus spécialement, j'ai cru devoir considérer les cas que M. *Hertz* a aussi étudiés [1]).

---

[1]) Après avoir achevé ce Mémoire, j'ai lu une publication récente de M. *Boltzmann*, intitulée: „*Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes*" (*Ier Theil, Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper*) dont l'objet principal est l'explication mécanique inaugurée par *Maxwell*. Bien que nous ayons été guidés, M. *Boltzmann* et moi, par la même idée fondamentale et que plusieurs de nos résultats soient équivalents, nous avons souvent employé des méthodes différentes et les questions que nous avions en vue n'étaient pas en général les mêmes.

Le principe de d'Alembert.

§ 4. Comme je me servirai à plusieurs reprises du principe de *d'Alembert*, je commencerai par lui donner une forme propre aux applications spéciales que je me propose.

Considérons un système matériel dont les points sont assujettis à certaines liaisons. En vertu de ces dernières le système ne peut pas prendre toutes les positions ou configurations imaginables, et, une position déterminée étant donnée, les points matériels ne peuvent pas recevoir des déplacements arbitrairement choisis. Je nommerai $m_1, m_2, \ldots$ les masses de ces points, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ leurs coordonnées, $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 \ldots$ les composantes des forces auxquelles ils se trouvent soumis, et je supposerai que toutes les variations infiniment petites $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \ldots$ qui peuvent avoir lieu à partir d'une position déterminée par $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ satisfont à un système d'équations homogènes et linéaires:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,\delta x_1 + b_1\,\delta y_1 + c_1\,\delta z_1 + a_2\,\delta x_2 + \ldots = 0 \\ a_1'\,\delta x_1 + b_1'\,\delta y_1 + c_1'\,\delta z_1 + a_2'\,\delta x_2 + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

Les coefficients a, b, c dépendront de la position, c'est-à-dire des coordonnées x, y, z, mais je supposerai que le temps t n'y entre pas explicitement.

J'indiquerai par $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dot{x}_2, \ldots$ les vitesses et par $\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \ddot{x}_2, \ldots$ les accélérations des points matériels dans le mouvement qu'on étudie. Alors le principe de *d'Alembert* exige que l'on ait:

$$\Sigma (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = \Sigma\, m\,(\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + \ddot{z}\,\delta z)$$

pour toutes les valeurs des variations qui sont compatibles avec les conditions (1).

La dernière formule peut être mise sous la forme:

$$\delta A = \Sigma\, m\,(\ddot{x}\,\delta x + \ddot{y}\,\delta y + \ddot{z}\,\delta z), \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

δA étant le travail des forces qui correspond aux déplacements virtuels δx, δy, δz.

§ 5. L'équation renferme seulement les valeurs de ces déplacements relatives au temps t. On peut cependant attribuer une variation infiniment petite non seulement à la position qu'occupe le système à cet instant, mais aussi aux autres positions qui se succèdent dans le cours du mouvement réel. Les variations des coordonnées doivent dans ce cas être considérées comme des fonctions de t, fonctions que je supposerai continues, et on peut imaginer un mouvement dans lequel le système prend à chaque instant la position variée dont il vient d'être question. Ce nouveau mouvement sera nommé le *mouvement varié*. La variation que subit une fonction quelconque des coordonnées et des vitesses, si, en laissant le temps constant, on passe du mouvement réel au mouvement varié, sera désignée par le signe δ.

Mettons l'équation (2) sous la forme:

$$\delta A = \frac{d}{dt}\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z) - \Sigma m(\dot{x}\frac{d\delta x}{dt} + \dot{y}\frac{d\delta y}{dt} + \dot{z}\frac{d\delta z}{dt})$$

et représentons par T l'énergie cinétique du système

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Comme on a

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta\dot{x}, \frac{d\delta y}{dt} = \delta\dot{y}, \frac{d\delta z}{dt} = \delta\dot{z},$$

on trouve

$$\Sigma m\left(\dot{x}\frac{d\delta x}{dt} + \dot{y}\frac{d\delta y}{dt} + \dot{z}\frac{d\delta z}{dt}\right) = \delta T.$$

D'autre part, l'expression

$$\Sigma m(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)$$

est évidemment la variation qu'on donnerait à T si on imposait aux vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ les variations δx, δy, δz que subissent en réalité les coordonnées. En indiquant par $\delta' T$ cette variation de T, on trouve

$$\delta A = \frac{d\delta' T}{dt} - \delta T. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dénominations et signes mathématiques employés dans ce mémoire.

§ 6. *a.* La direction d'une rotation dans un plan et la direction d'une normale à ce même plan seront dites *correspondre* l'une à l'autre si le premier mouvement est opposé à celui des aiguilles d'une montre posée sur le plan et ayant le cadran tourné vers le même côté que la normale.

b. Les axes des coordonnées, OX, OY, OZ, seront choisis de manière que la direction de OZ corresponde à celle d'une rotation de 90° de OX vers OY.

c. Un espace, une surface et une ligne seront désignés respectivement par τ, σ, et s, les parties infiniment petites dans lesquelles ils peuvent être divisés par $d\tau$, $d\sigma$, ds.

d. La normale à une surface quelconque σ sera toujours dirigée vers un côté déterminé qu'on nommera le côté positif. Dans le cas d'une surface limitée, la direction de la normale et la direction positive le long du contour s seront liées l'une à l'autre par la règle suivante:

Dans un point P de la surface, tout près du bord, la direction de la normale doit correspondre à celle de la rotation que subit la ligne PQ si le point Q parcourt dans le sens positif la partie du contour qui se trouve dans le voisinage de P.

e. La normale à une surface sera toujours désignée par la lettre n, et une direction quelconque dans le plan tangent par la lettre h.

f. Nous aurons à considérer un grand nombre de fonctions qui dépendent des coordonnées x, y, z et peuvent dépendre en outre du temps t. La *distribution* d'une telle fonction, c'est-à-dire la manière dont elle varie d'un point à l'autre, sera déterminée par des équations de deux sortes, les unes relatives aux points de l'espace, c'est-à-dire à tous les points où il n'y a aucune discontinuité, et les autres relatives aux points des surfaces qui séparent deux corps ou milieux différents et où des discontinuités peuvent se présenter.

Pour distinguer dans ces dernières équations les quantités qui se rapportent au premier ou au second corps, on fera usage des indices 1 et 2. Ainsi la continuité d'une fonction φ sera exprimée par l'équation :

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

La normale sera toujours dirigée vers le côté qui est indiqué par l'indice 2.

g. Un vecteur sera représenté en général par une lettre grasse et la composante d'un vecteur $\mathbf{A}$ suivant la direction l par le signe $\mathbf{A}_l$.

Pour connaître la distribution d'un vecteur $\mathbf{A}$ il faut que l'on connaisse la distribution des trois composantes $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$.

Un vecteur aux composantes X, Y, Z sera aussi représenté par le signe (X, Y, Z).

h. La distribution d'un vecteur $\mathbf{A}$ sera dite *solénoïdale* lorsque dans tous les points de l'espace les composantes sont égales à celles de la vitesse dans un mouvement possible d'un fluide incompressible. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$\frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} = 0$$

et

$$(\mathbf{A}_n)_1 = (\mathbf{A}_n)_2.$$

i. L'intégrale

$$\int \mathbf{A}_n \, d\sigma$$

sera nommée l'intégrale du vecteur $\mathbf{A}$ étendue à la surface σ, et par l'intégrale du vecteur prise le long d'une ligne s on entendra l'expression

$$\int \mathbf{A}_s \, d s.$$

j. Le signe Δ aura la signification suivante:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

k. L'expression

$$M \;(=)\; N$$

signifiera que les quantités M et N sont du même ordre de grandeur.

CHAPITRE I.

Mouvements électriques dans des corps qui se trouvent en repos.

Valeur de l'énergie cinétique.

§ 7. Considérons un système quelconque de corps, conducteurs ou diélectriques, homogènes et isotropes ou non et remplissant l'espace infini, l'un d'entre eux pouvant être l'éther de l'optique. Dans tous ces corps, même, suivant les idées de *Maxwell*, dans l'éther, le phénomène qu'on appelle un courant électrique peut avoir lieu. Le courant mesuré en unités électromagnétiques sera représenté par **C**, et pour abréger j'écrirai u, v, w, au lieu de $\mathbf{C}_x$, $\mathbf{C}_y$, $\mathbf{C}_z$. Avec *Maxwell* je supposerai que la distribution du courant est toujours solénoïdale. Il faut donc que l'on ait:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

et

$$(\mathbf{C}_n)_1 = (\mathbf{C}_n)_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

§ 8. L'explication des phénomènes d'induction au moyen de la *masse* des particules qui prennent part aux mouvements électromagnétiques constitue un des traits caractéristiques de la théorie de *Maxwell*. Or, dans l'équation (3) qui exprime le principe de *d'Alembert*, la masse des points matériels est implicitement renfermée dans le second membre; on est donc amené à considérer en premier lieu la valeur de l'énergie cinétique T dans un système où il y a des courants électriques. Suivant *Maxwell*, cette énergie n'est autre chose que celle désignée par le nom d'énergie électromagnétique. La valeur en peut être calculée au moyen de deux vecteurs qu'on appelle la *force magnétique* et *l'induction magnétique*.

La force magnétique et ses composantes seront représentées par **H**, α, β, γ, l'induction magnétique et ses composantes par **B**, a, b, c.

§ 9. Voici les propriétés de ces deux vecteurs qui servent à les déterminer dès qu'on connaît la distribution du courant électrique:

1. La distribution de l'induction magnétique est solénoïdale.

2. L'intégrale de la force magnétique, prise le long du contour d'une surface limitée quelconque, est égale au produit par 4π de l'intégrale du courant électrique étendue à cette surface.

3. A chaque point de l'espace les deux vecteurs sont liés l'un à l'autre par des équations linéaires:

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu_{x,x}\,\alpha + \mu_{x,y}\,\beta + \mu_{x,z}\,\gamma, \\ b &= \mu_{y,x}\,\alpha + \mu_{y,y}\,\beta + \mu_{y,z}\,\gamma, \\ c &= \mu_{z,x}\,\alpha + \mu_{z,y}\,\beta + \mu_{z,z}\,\gamma, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

dans lesquelles on a toujours:

$$\mu_{x,y} = \mu_{y,x},\ \mu_{y,z} = \mu_{z,y},\ \mu_{z,x} = \mu_{x,z} \quad \ldots\ldots (7)$$

Les coefficients μ sont des constantes dépendant des propriétés magnétiques du corps dont il s'agit; ils peuvent varier d'un point à l'autre. Dans un corps isotrope, $\mu_{x,x}$, $\mu_{y,y}$ et $\mu_{z,z}$ ont une valeur commune μ et les autres coefficients sont nuls. Dans l'éther on a $\mu = 1$; les deux vecteurs **H** et **B** se confondent par suite en un seul.

En adoptant les équations (6) nous avons exclu les cas où l'aimantation n'est pas proportionnelle à la force magnétique et ceux où il y a du magnétisme permanent.

Quant aux propriétés de l'induction et de la force magnétiques que je viens de rappeler, elles se traduisent par les formules suivantes:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$(\mathbf{B}_n)_1 = (\mathbf{B}_n)_2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4\pi u,\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 4\pi v, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4\pi w, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

$$(\mathbf{H}_h)_1 = (\mathbf{H}_h)_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Par un artifice mathématique que je passerai sous silence on démontre que les vecteurs **B** et **H** sont complètement déterminés par les conditions 1, 2 et 3.

§ 10. Une fois la force et l'induction magnétiques connues, l'énergie cinétique est donnée par la formule:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma)\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

L'expression $\frac{1}{8\pi}\,(a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma)\,d\,\tau$ représente l'énergie cinétique qui se trouve dans l'élément $d\,\tau$.

Cette manière de voir implique deux conditions. Il faut d'abord que la force et l'induction magnétiques aient une telle signification physique qu'elles puissent déterminer le mouvement électromagnétique dans chaque élément de volume. En second lieu, les coefficients μ dans les équations (6) doivent être tels que l'expression $a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma$ soit toujours positive. Dans tous les cas connus cette condition est satisfaite.

L'intégrale (12) doit être étendue à l'espace infini, et il en sera de même de plusieurs autres intégrales que nous rencontrerons. Je supposerai que toutes les fonctions qui servent à déterminer un dérangement de l'état naturel du système, telles que u, v, w, α, β, γ, a, b, c, sont nulles à l'infini, et qu'à une grande distance elles diminuent même si rapidement que des intégrales telles que celle de l'expression (12) restent finies.

J'aurai plusieurs fois à appliquer l'intégration par parties à des intégrales relatives à un espace. Si cet espace est contenu dans une surface fermée S, cette opération conduit, comme on sait, à une intégrale étendue à cette surface. Or, je supposerai, une fois pour toutes, que dans les cas que nous aurons à étudier cette intégrale tend vers la limite 0 si les points de la surface S s'éloignent vers l'infini.

Enfin, dans l'énumération des propriétés qui servent à déterminer telle ou telle fonction, la condition qu'elle s'évanouit à distance infinie sera souvent tacitement admise.

Variation de l'énergie cinétique.

§ 11. Supposons que les composantes u, v, w du courant électrique subissent des variations infiniment petites δu, δv, δw qui sont elles-mêmes les composantes d'un vecteur à distribution solénoïdale. Indiquons par le signe δ les variations correspondantes des quantités qui dépendent de u, v, w et calculons la valeur de δT.

L'équation (12) donne:

$$\delta T = \frac{1}{8\pi} \int (a\,\delta\alpha + b\,\delta\beta + c\,\delta\gamma + \alpha\,\delta a + \beta\,\delta b + \gamma\,\delta c)\,d\tau,$$

mais en vertu des relations (6) et (7) cette formule peut être remplacée par la suivante:

$$\delta T = \frac{1}{4\pi} \int (a\,\delta\alpha + b\,\delta\beta + c\,\delta\gamma)\,d\tau \quad . \; . \; . \; . \quad (13)$$

§ 12. Introduisons un vecteur auxiliaire dont les composantes F, G, H sont déterminées par les équations:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} = a,\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} = b,\ \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = c, \\ &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\ &F_1 = F_2,\ G_1 = G_2,\ H_1 = H_2. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (14)$$

Grâce à la propriété fondamentale de l'induction magnétique (§ 9, 1), on peut toujours satisfaire à ces conditions; de plus, on ne peut le faire que d'une seule manière. Le vecteur (F, G, H) se trouve donc entièrement déterminé.

L'équation (13) devient

$$\delta T = \frac{1}{4\pi} \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) \delta\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) \delta\beta + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) \delta\gamma \right] d\tau,$$

ou, si on applique l'intégration par parties:

$$\delta T = \frac{1}{4\pi}\int \left[F\left(\frac{\partial \delta\gamma}{\partial y} - \frac{\partial \delta\beta}{\partial z}\right) + G\left(\frac{\partial \delta\alpha}{\partial z} - \frac{\partial \delta\gamma}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + H\left(\frac{\partial \delta\beta}{\partial x} - \frac{\partial \delta\alpha}{\partial y}\right)\right] d\tau.$$

Dans la dernière opération on a eu égard aux trois dernières des formules (14) et à la condition de continuité:

$$(\delta \mathbf{H}_h)_1 = (\delta \mathbf{H}_h)_2,$$

qui découle de l'équation (11).

Des formules (10) on déduit

$$\frac{\partial \delta \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \delta \beta}{\partial z} = 4\pi\delta u, \quad \frac{\partial \delta \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \delta \gamma}{\partial x} = 4\pi\delta v,$$
$$\frac{\partial \delta \beta}{\partial x} - \frac{\partial \delta \alpha}{\partial y} = 4\pi\delta w;$$

on trouve donc finalement:

$$\delta T = \int (F\delta u + G\delta v + H\delta w)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Quantités qui servent à définir un déplacement virtuel du système.

§ 13. Faisons abstraction pour un moment du mouvement réel que nous voulons étudier et portons notre attention sur le fait que le système, à un moment où il occupe une position déterminée W, peut être le siège de mouvements électriques très différents. Soient u', v', w' les composantes du courant dans un de ces mouvements imaginables, les signes u, v, w étant réservés au mouvement réel.

Soit P un quelconque des points matériels qui prennent part au mouvement.

Je suppose qu'en vertu des liaisons entre les parties du système les composantes ξ, η, ζ de la vitesse de ce point sont des fonctions linéaires des valeurs de u', v', w' dans tous les points de l'espace, les coefficients dans ces fonctions dépen-

dant de la position W, c'est-à-dire des coordonnées. Il va sans dire que les fonctions dont il est question pourraient être mises sous forme d'intégrales; cependant, je les présenterai comme des sommes. Si on divise l'espace entier en éléments de volume et qu'on désigne par u', v', w' les valeurs de ces composantes dans le centre ou quelque autre point fixe de chaque élément, on aura

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \Sigma (A u' + B v' + C w'),\\ \eta &= \Sigma (A' u' + B' v' + C' w'),\\ \zeta &= \Sigma (A'' u' + B'' v' + C'' w'),\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

chacune de ces sommes contenant autant de termes qu'il y a d'éléments de volume.

Si l'on prend pour A, B, C, A', ... les valeurs qui correspondent à la position que le système occupe au temps t dans le mouvement réel et qu'on remplace u', v', w' par u, v, w, les formules (16) font connaître la vitesse réelle du point P.

§ 14. Revenons au mouvement imaginaire déterminé par u', v', w'. Supposons que ce mouvement ait lieu pendant un temps τ infiniment petit, les composantes u', v', w' restant constantes.

Comme les coefficients A, B, C, A', ... peuvent être regardés comme invariables pendant l'intervalle τ, on trouve pour les déplacements du point P dans les directions des axes:

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= \Sigma (A u' \tau + B v' \tau + C w' \tau),\\ \delta y &= \Sigma (A' u' \tau + B' v' \tau + C' w' \tau),\\ \delta z &= \Sigma (A'' u' \tau + B'' v' \tau + C'' w' \tau);\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

expressions dont les valeurs sont complètement déterminées par les produits $u' \tau$, $v' \tau$, $w' \tau$.

§ 15. Ces produits ont une signification bien simple.

Si $\mathbf{C}'$ est le courant électrique en un point de l'élément de surface $d\sigma$, élément fixé dans l'espace, la quantité

$$\mathbf{C}_n' \tau \, d\sigma$$

représente ce qu'on appelle la quantité d'électricité qui, pendant le temps τ, a traversé cet élément dans la direction po-

sitive. Pour l'unité de surface la quantité analogue devient $\mathfrak{C}'_n \tau$. On voit donc que les produits $u'\tau$, $v'\tau$, $w'\tau$ ne sont autre chose que les quantités d'électricité, rapportées à l'unité de surface, qui ont traversé des éléments perpendiculaires aux axes des coordonnées. En désignant ces quantités infiniment petites par

$$\mathfrak{e}_x,\ \mathfrak{e}_y,\ \mathfrak{e}_z$$

on trouve:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \Sigma\,(A\,\mathfrak{e}_x + B\,\mathfrak{e}_y + C\,\mathfrak{e}_z), \\ \delta y &= \Sigma\,(A'\mathfrak{e}_x + B'\,\mathfrak{e}_y + C'\,\mathfrak{e}_z), \\ \delta z &= \Sigma\,(A''\mathfrak{e}_x + B''\mathfrak{e}_y + C''\mathfrak{e}_z). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

Remarquons que le temps plus ou moins long que les quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ mettent à traverser les éléments de surface dont il vient d'être question, n'entre plus dans ces formules.

§ 16. Ce sont les quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ qui nous serviront à définir un déplacement virtuel du système. Elles doivent être regardées comme des fonctions de x, y et z. La nature du système leur impose la condition que la distribution du vecteur $\mathfrak{e}$, dont elles sont les composantes, doit être solénoïdale.

Du reste, $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ peuvent varier avec le temps. Dès que ces quantités ont été choisies comme des fonctions de x, y, z et t, on peut se former une idée du mouvement varié dans lequel se change le mouvement réel qu'on désire étudier. En effet, on peut en pensée arrêter tous les points mobiles dans les positions qu'ils occupent au temps t dans le mouvement réel. A partir de cette configuration on peut déplacer les points de la manière déterminée par $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$; on obtient alors la position variée pour le temps t. La position variée pour tout autre moment s'obtient de la même manière, et le mouvement varié n'est autre chose que la succession de toutes les positions variées.

J'ai déjà remarqué que l'équation fondamentale (2) renferme seulement les valeurs de δx, δy, δz relatives au temps t. Il en est de même de la formule (3), qui n'est qu'une transformée de l'équation (2). En effet, les dérivées de δx, δy, δz par rap-

port au temps, qu'on trouve dans les deux termes du second membre, disparaissent si on développe ces termes.

Il en résulte que les conséquences qui découlent du principe de *d'Alembert* sont indépendantes de la manière dont δx, δy, δz, ou, dans le cas qui nous occupe, $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ varient avec le temps.

Dans l'application qui va suivre, ces dernières quantités sont supposées indépendantes de t.

Voici encore une remarque importante. Si l'on admet que le seul moyen par lequel on puisse déplacer les points du système consiste à y établir des courants électriques, on obtiendra tous les déplacements virtuels possibles en donnant aux quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$ et $\mathfrak{e}_z$ toutes les valeurs dont elles sont susceptibles.

Application du principe de d'Alembert.

§ 17. Pour appliquer la formule (3) je considérerai successivement les variations $\delta' T$, δT et le travail δA.

Par $\delta' T$ nous avons représenté la variation que subit l'énergie cinétique si les vitesses des points matériels éprouvent des variations égales à celles qui sont apportées en réalité aux coordonnées. Or, dans le problème actuel, cette condition se trouve réalisée si, tout en maintenant constante la configuration qui se présente dans le mouvement réel, on augmente de $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ les composantes du courant. En effet, si dans les formules (16) les coefficients A, B, C, A', ... demeurent invariables et que les composantes du courant électrique reçoivent les accroissements $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$, les variations de ξ, η et ζ seront:

$$\Sigma (A\,\mathfrak{e}_x + B\,\mathfrak{e}_y + C\,\mathfrak{e}_z),$$
$$\Sigma (A'\,\mathfrak{e}_x + B'\,\mathfrak{e}_y + C'\mathfrak{e}_z),$$
$$\Sigma (A''\mathfrak{e}_x + B''\mathfrak{e}_y + C''\mathfrak{e}_z);$$

elles deviennent égales aux valeurs que les équations (18) donnent pour δx, δy, δz.

On voit donc que la variation $\delta' T$ peut être calculée au moyen de la formule (15); il faut pour cela remplacer δu, δv, δw par $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$. $\mathfrak{e}_z$. Comme ces quantités sont supposées indépendantes du temps, on trouve:

$$\frac{d\,\delta' T}{d\,t} = \int \left(\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathfrak{e}_x + \frac{\partial G}{\partial t}\,\mathfrak{e}_y + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathfrak{e}_z \right) d\,\tau,$$

les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial G}{\partial t}$, $\frac{\partial H}{\partial t}$ se rapportant au mouvement réel.

§ 18. La variation $\delta\, T$ devient 0, si l'on introduit l'hypothèse suivante, analogue à celle dont *Maxwell* s'est servi dans sa théorie des circuits linéaires. (§ 2).

La position de chaque point matériel se trouve déterminée par les quantités d'électricité qui, à partir d'un moment fixe arbitrairement choisi, ont traversé les éléments de surface qu'on peut faire passer par les différents points de l'espace; ou, ce qui revient au même:

Si, après une série de mouvements, chaque élément de surface a été traversé dans les deux directions opposées par des quantités égales d'électricité, tous les points matériels se trouvent ramenés à leurs positions primitives.

Il est presque superflu de dire que la quantité d'électricité qui traverse un élément $d\,\sigma$ pendant un certain temps dans la direction positive est représentée par l'intégrale

$$\int \mathfrak{C}_n\, d\,t \,.\, d\,\sigma$$

et qu'on parle d'une quantité d'électricité e qui est passée vers le côté négatif, si cette intégrale a la valeur: $-e$.

L'hypothèse mentionnée donne lieu à ce théorème:

Si les quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ sont indépendantes du temps, le mouvement varié, bien qu'il diffère du mouvement réel par les configurations qui se succèdent, consiste en un système de courants dans lequel u, v, w ont les mêmes valeurs que dans le mouvement réel.

Or, l'énergie cinétique dépend uniquement des valeurs de u, v et w; on trouve donc

$$\delta T = 0.$$

§ 19. Voici comment on démontre le théorème du paragraphe précédent.

Soient W_1 et W_2 les configurations qu'occupe le système dans le mouvement réel aux moments t et $t + dt$, W_1' et W_2' les configurations variées correspondantes. Le mouvement varié est celui qui fait passer le système de la position W_1' à la position W_2', ce passage s'accomplissant dans le temps dt et tous les points décrivant des lignes droites, infiniment petites.

Si donc on commence par la position W_2', et qu'on donne successivement au système les déplacements:

$$W_2' \rightarrow W_2, \quad W_2 \rightarrow W_1, \quad W_1 \rightarrow W_1',$$

le mouvement varié est celui par lequel la position primitive W_2' se rétablit après un temps dt.

Pendant les trois déplacements, des éléments de surface perpendiculaires aux axes ont été traversés successivement par les quantités d'électricité:

$$\begin{array}{ccc} -\mathfrak{e}_x, & -\mathfrak{e}_y, & -\mathfrak{e}_z, \\ -u\,dt, & -v\,dt, & -w\,dt, \\ +\mathfrak{e}_x, & +\mathfrak{e}_y, & +\mathfrak{e}_z, \end{array}$$

toutes ces quantités ayant été rapportées à l'unité de surface.

Si donc, à partir de la position W_1', on fait exister pendant un temps dt des courants u, v, w, la somme algébrique des quantités d'électricité qui ont traversé un élément devient 0 et d'après notre hypothèse le système est ramené à la position W_2'. Le système des courants u, v, w constitue donc bien le mouvement varié $W_1' \rightarrow W_2'$.

§ 20. Reste à considérer le travail δA. Lorsqu'on en veut calculer la valeur, on peut passer sous silence toutes les forces qui servent à maintenir les liaisons du système, c'est-à-dire les forces qui sont mises en jeu, parce que la distribution du courant électrique doit être solénoïdale et parce que l'induc-

tion et la force magnétiques qui déterminent les mouvements électromagnétiques sont liées aux courants de la manière qui a été considérée au paragraphe 9. Les forces dont il faut bien tenir compte ne sont pas les mêmes dans des corps de nature différente. Cependant, comme on le verra plus loin, on peut dans tous les cas indiquer pour chaque point de l'espace trois quantités X, Y, Z, telles que

$$-\int (X\,\mathfrak{e}_x + Y\,\mathfrak{e}_y + Z\,\mathfrak{e}_z)\,d\tau \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

représente le travail des forces pour le déplacement virtuel défini par $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$.

La formule (3) devient donc:

$$-\int (X\,\mathfrak{e}_x + Y\,\mathfrak{e}_y + Z\,\mathfrak{e}_z)\,d\tau =$$
$$= \int \left(\frac{\partial F}{\partial t}\,\mathfrak{e}_x + \frac{\partial G}{\partial t}\,\mathfrak{e}_y + \frac{\partial H}{\partial t}\,\mathfrak{e}_z\right) d\tau, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

relation qui renferme à elle seule toutes les équations du mouvement. Pour en tirer toutes les conséquences, il suffit d'exprimer que la formule doit être vraie pour toutes les valeurs admissibles de $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$. Cependant, avant de procéder plus loin, il sera utile d'étudier les valeurs de X, Y, Z dans des cas particuliers.

Valeurs de X, Y et Z pour les diélectriques.

§ 21. Lorsque quelques-unes des forces qui agissent dans le système dérivent d'une énergie potentielle, le travail de ces forces est égal à la diminution de cette énergie. Or, suivant les idées de *Maxwell*, les forces qui agissent dans les corps non conducteurs ou diélectriques possèdent cette propriété.

Dans les diélectriques il existe un état d'équilibre naturel qui est dérangé par tout mouvement de l'électricité, et un tel dérangement donne lieu à une certaine énergie potentielle.

Appelons f, g et h les quantités d'électricité qui, à partir de l'état naturel, ont traversé des éléments de surface perpendiculaires à OX, OY et OZ, ces quantités étant ramenées à l'unité de surface; alors on peut écrire pour l'énergie potentielle par unité de volume

$$\tfrac{1}{2}(\nu_{x,x} f^2 + \nu_{y,y} g^2 + \nu_{z,z} h^2 + 2\nu_{x,y} fg + 2\nu_{y,z} gh + \\ + 2\nu_{z,x} hf), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

où les coefficients ν dépendent des propriétés physiques du corps. Dans le cas des diélectriques anisotropes il est en général nécessaire de connaître les valeurs des six coefficients. Pour les corps isotropes la chose est plus simple: les coefficients $\nu_{x,y}$, $\nu_{y,z}$ et $\nu_{z,x}$ s'évanouissent et les trois autres ont une valeur commune ν.

Pour augmenter la symétrie des formules, j'écrirai quelquefois $\nu_{y,x}$, $\nu_{z,y}$, $\nu_{x,z}$ au lieu de $\nu_{x,y}$, $\nu_{y,z}$, $\nu_{z,x}$.

§ 22. Les quantités f, g et h peuvent être regardées comme les composantes d'un vecteur que je représenterai par $\mathbf{D}$ et que *Maxwell* nomme le *déplacement diélectrique*. En se rappelant la définition de f, g et h on s'assure facilement que la distribution de ce vecteur doit être solénoïdale, ce qui s'exprime par les formules: [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

$$(\mathbf{D}_n)_1 = (\mathbf{D}_n)_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

S'il y a mouvement de l'électricité, les valeurs de f, g et h changent avec le temps et les composantes du courant sont évidemment données par les formules:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

D'une manière analogue, les quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ qui déterminent un déplacement virtuel doivent être considérées comme des variations de f, g et h.

---

[1]) Ces formules cessent d'être vraies s'il y a une „charge électrique" à l'intérieur d'un isolateur ou à la surface qui sépare deux de ces corps. Je reviendrai sur ce cas au paragraphe 43.

§ 23. Cette dernière remarque conduit à la valeur suivante de δA, en tant que ce travail dépend des forces qui agissent à l'intérieur d'un diélectrique:

$$-\int\Big\{(\nu_{x,x} f + \nu_{x,y} g + \nu_{x,z} h)\,\mathfrak{e}_x +$$
$$+ (\nu_{y,x} f + \nu_{y,y} g + \nu_{y,z} h)\,\mathfrak{e}_y + (\nu_{z,x} f + \nu_{z,y} g + \nu_{z,z} h)\,\mathfrak{e}_z\Big\}\, d\tau.$$

En identifiant ceci avec l'expression (19), on trouve

$$\left.\begin{aligned} X &= \nu_{x,x} f + \nu_{x,y} g + \nu_{x,z} h, \\ Y &= \nu_{y,x} f + \nu_{y,y} g + \nu_{y,z} h, \\ Z &= \nu_{z,x} f + \nu_{z,y} g + \nu_{z,z} h. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Valeurs de X, Y et Z pour les conducteurs.

§ 24. Le développement de chaleur qui accompagne les courants électriques dans les conducteurs prouve que dans ces corps il y a des causes qui tendent à diminuer l'énergie électromagnétique. Il faut donc admettre qu'il existe des forces, comparables au frottement de la mécanique ordinaire, dont le travail est négatif dans tous les mouvements réels.

La quantité de chaleur qui est dégagée dans un fil conducteur étant proportionnelle au carré de l'intensité du courant, il est naturel de supposer que dans un conducteur quelconque le développement de chaleur est une fonction homogène du second degré de u, v et w. J'écrirai donc pour le travail de la résistance par unité de volume, pendant le temps dt,

$$-(\varkappa_{x,x} u^2 + \varkappa_{y,y} v^2 + \varkappa_{z,z} w^2 + 2\varkappa_{x,y} uv + 2\varkappa_{y,z} vw + 2\varkappa_{z,x} wu)\,dt$$

ou

$$-\big[(\varkappa_{x,x} u + \varkappa_{x,y} v + \varkappa_{x,z} w)\,u\,dt + (\varkappa_{y,x} u + \varkappa_{y,y} v + \varkappa_{y,z} w)\,v\,dt +$$
$$+ (\varkappa_{z,x} u + \varkappa_{z,y} v + \varkappa_{z,z} w)\,w\,dt\big],$$

les constantes $\varkappa$ dépendant de la nature du conducteur et $\varkappa_{y,x}$, $\varkappa_{z,y}$, $\varkappa_{x,z}$ désignant la même chose que $\varkappa_{x,y}$, $\varkappa_{y,z}$, $\varkappa_{z,x}$.

Si le conducteur est isotrope, on a $\varkappa_{x,y} = \varkappa_{y,z} = \varkappa_{z,x} = 0$, et les coefficients $\varkappa_{x,x}$, $\varkappa_{y,y}$ et $\varkappa_{z,z}$ ont une valeur commune $\varkappa$.

Les produits $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ représentent pour le mouvement réel ce que nous avons indiqué dans le cas général par $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$. On voit donc que, tant qu'il s'agit d'un mouvement réel, le travail des forces peut être calculé au moyen de la formule (19) si l'on pose:

$$\left.\begin{aligned} X &= \varkappa_{x,x}\, u + \varkappa_{x,y}\, v + \varkappa_{x,z}\, w, \\ Y &= \varkappa_{y,x}\, u + \varkappa_{y,y}\, v + \varkappa_{y,z}\, w, \\ Z &= \varkappa_{z,x}\, u + \varkappa_{z,y}\, v + \varkappa_{z,z}\, w. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Or, je supposerai que, si on emploie ces valeurs, le travail des forces dans un déplacement virtuel peut également être mis sous la forme (19); hypothèse, du reste, qui est confirmée par le fait que les conséquences qui en découlent s'accordent avec l'expérience.

Il n'y a qu'un seul cas où l'on a eu recours à des valeurs de X, Y et Z différentes de celles que je viens d'indiquer. Pour expliquer le phénomène de *Hall*, qui se produit dans des feuilles métalliques placées dans un champ magnétique, on a ajouté aux derniers membres des équations (26) des termes de la forme:

$$l_3\, v - l_2\, w, \quad l_1\, w - l_3\, u, \quad l_2\, u - l_1\, v.$$

Mais le phénomène de *Hall* ne sera pas considéré dans ce mémoire.

Équations du mouvement.

§ 25. Revenons maintenant à l'équation (20), qui peut être remplacée par

$$\int \left[\left(X + \frac{\partial F}{\partial t} \right) p + \left(Y + \frac{\partial G}{\partial t} \right) q + \left(Z + \frac{\partial H}{\partial t} \right) r \right] \mathfrak{e}\, d\tau = 0,$$

si on désigne par p, q et r les cosinus directeurs du vecteur $\mathfrak{e}$ dont $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ sont les composantes.

Il faut appliquer cette condition à tous les déplacements

virtuels qui sont compatibles avec la condition que la distribution du vecteur $\mathbf{e}$ doit être solénoïdale.

Concevons un tube annulaire d'une section infiniment petite; l'axe de ce tube, c'est-à-dire la ligne fermée s qui passe par les centres de gravité de toutes les sections droites, peut être de forme quelconque. Désignons par ω la surface d'une de ces sections, et prenons $\mathbf{e}=0$ dans tous les points à l'extérieur du tube. Supposons aussi qu'à l'intérieur le vecteur $\mathbf{e}$ ait partout la direction d'une circulation le long de la ligne s, que $\mathbf{e}$ ait une même valeur dans tous les points d'une même section droite et que le produit $\mathbf{e}\,\omega$ ne change pas d'une section à l'autre. On reconnaîtra immédiatement que la distribution de $\mathbf{e}$ est alors solénoïdale. En substituant dans la formule précédente:

$$d\tau = \omega\, d s$$

et en divisant par $\mathbf{e}\,\omega$, on trouve

$$\int\left[\left(X+\frac{\partial F}{\partial t}\right)p+\left(Y+\frac{\partial G}{\partial t}\right)q+\left(Z+\frac{\partial H}{\partial t}\right)r\right]ds=0, \quad (27)$$

équation qui doit être vraie pour une ligne fermée quelconque, et dans laquelle p, q, r sont maintenant les cosinus directeurs d'un élément de cette ligne.

§ 26. Si l'on prend pour la ligne fermée le contour d'un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles à deux des axes des coordonnées et qui n'est pas coupé par une surface de discontinuité, on trouve:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

On peut considérer en second lieu une ligne fermée qui se trouve moitié d'une part et moitié d'autre part d'une surface de discontinuité. Soit s une ligne quelconque non fermée située dans cette surface; le contour auquel j'appliquerai la formule

(27) sera composé de deux lignes s_1 et s_2, situées des deux côtés de la surface à une distance infiniment petite de la ligne s, et de deux lignes infiniment petites qui joignent les extrémités de s_1 et s_2. Comme les fonctions F, G et H sont continues (§ 12), la formule (27) revient à la condition que les intégrales du vecteur (X, Y, Z), prises le long des lignes s_1 et s_2, doivent être égales entre elles. Or, ceci exige que, si **R** représente ce vecteur, on ait pour toute direction h située dans le plan tangent:

$$(\mathbf{R}_h)_1 = (\mathbf{R}_h)_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Il est facile de s'assurer que la condition (20) sera remplie pour tous les déplacements admissibles, dès que les composantes X, Y, Z satisfont aux équations (28) et (29). Nous avons donc trouvé le système complet des équations de mouvement.

§ 27. En ayant égard aux formules (14) on peut donner aux équations (28) la forme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= \frac{\partial a}{\partial t}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\partial b}{\partial t}, \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{\partial c}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

ce qui présente l'avantage que les fonctions F, G et H ont disparu. Tous les problèmes spéciaux peuvent être traités au moyen de formules qui ne contiennent que le courant électrique, le déplacement diélectrique, les fonctions X, Y et Z et enfin la force et l'induction magnétiques. Les équations (4), (5), (6), (8), (9), (10), (11), (22) et (23) expriment les liaisons entre les parties du système; les équations (24) résultent de la définition même de f, g et h; dans les formules (25) et (26) on a résumé ce que l'expérience nous apprend sur les forces agissant dans le système; enfin les relations (30) et (29) sont les équations du mouvement proprement dites. Tout comme dans la mécanique ordinaire, elles nous font connaître la dépendance mutuelle des forces et des accélérations. En effet,

les valeurs de la force et de l'induction magnétiques déterminent les vitesses des mouvements électromagnétiques; les accélérations se trouvent par conséquent renfermées dans les dérivées $\frac{\partial a}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}$.

Formules de l'électrostatique.

§ 28. S'il y a équilibre électrique, on a $u = v = w = 0$, et par conséquent la force magnétique, l'induction magnétique et le vecteur (F, G, H) disparaissent. La formule (27) exige alors que pour toute ligne fermée on ait

$$\int (Xp + Yq + Zr)\, ds = \int \mathbf{R}_s\, ds = 0, \quad . \ . \ . \ . \ (31)$$

condition qui se laisse encore énoncer comme il suit:

Pour toutes les lignes qu'on peut mener entre deux points A et P l'intégrale

$$\int_A^P \mathbf{R}_s\, ds \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (32)$$

doit avoir la même valeur.

Prenons pour A un point situé à l'infini; la valeur de l'intégrale prise avec le signe — est alors appelée le *potentiel* au point P. Cette fonction sera représentée par φ.

De cette définition et de la circonstance qu'à l'intérieur d'un conducteur X, Y, Z ont, dans le cas de l'équilibre, la valeur 0, on déduit les propositions suivantes:

a. Le potentiel est 0 à distance infinie.

b. Dans tous les points d'un même conducteur il a la même valeur.

c. Il est continu à chaque surface de discontinuité

d. Les fonctions X, Y et Z sont données par les formules:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad . \ . \ . \ . \ (33)$$

§ 29. Les équations (25) peuvent être mises sous la forme :

$$f = \nu'_{x,x}\, X + \nu'_{x,y}\, Y + \nu'_{x,z}\, Z,$$
$$g = \nu'_{y,x}\, X + \nu'_{y,y}\, Y + \nu'_{y,z}\, Z,$$
$$h = \nu'_{z,x}\, X + \nu'_{z,y}\, Y + \nu'_{z,z}\, Z,$$

les coefficients ν' étant déterminés par les valeurs des coefficients ν, et $\nu'_{y,x}$, $\nu'_{z,y}$, $\nu'_{x,z}$ étant respectivement égaux à $\nu'_{x,y}$, $\nu'_{y,z}$, $\nu'_{z,x}$.

En substituant dans ces formules les valeurs de X, Y et Z données dans le paragraphe précédent et en portant les valeurs de f, g et h dans les équations (22) et (23), on trouve des équations différentielles qui, jointes aux conditions déjà trouvées, suffisent à la détermination du potentiel φ dès que la valeur en est connue pour chaque conducteur du système.

Dans le cas d'un diélectrique homogène et isotrope, la formule (22) conduit à l'équation connue de *Laplace*.

§ 30. Supposons qu'au moyen des valeurs de φ dans les différents conducteurs du système on ait calculé pour tous les points de l'espace les valeurs de φ, f, g et h. Quelle est alors la grandeur de la *charge* de chaque conducteur? Ce qu'on appelle ainsi, c'est la quantité d'électricité E qu'il faut enlever au conducteur, au moyen d'un fil métallique par exemple, si l'on veut ramener le système à l'état naturel.

Soit σ une surface fermée, enveloppant le conducteur et traversant le fil conducteur qui sert à opérer la décharge. Distinguons par les indices d et f les intégrales qui se rapportent aux parties de la surface situées dans le diélectrique et dans le fil. En vertu de la propriété fondamentale des courants électriques, il faut qu'à chaque instant pendant la décharge :

$$\int_f \mathbf{C}_n \, d\sigma + \int_d \mathbf{C}_n \, d\sigma = 0 \;,$$

ou bien, comme dans le diélectrique

$$\mathbf{C}_n = \frac{d\, \mathbf{D}_n}{d\, t} \,,$$

$$\int_f \mathbf{C}_n \, d\sigma = -\frac{d}{dt} \int_d \mathbf{D}_n \, d\sigma .$$

Je suppose la normale n dirigée vers l'extérieur de la surface.

Multiplions par dt l'équation précédente et intégrons sur toute la durée de la décharge. Le premier membre devient alors égal à la charge que possédait le conducteur, et, en entendant par $\mathbf{D}$ le déplacement diélectrique qui existait avant la décharge, on trouve

$$E = \int \mathbf{D}_n \, d\sigma.$$

Par des raisonnements qu'il est superflu de reproduire ici, on s'assure que la formule est encore vraie si le conducteur est maintenu isolé et que l'intégration soit étendue à toutes les parties d'une surface fermée enveloppant le conducteur.

Dans ce qui a été dit dans les trois derniers paragraphes ou reconnaîtra immédiatement des propositions bien connues de l'électrostatique.

Hypothèse du fluide électrique.

§ 31. Plusieurs des raisonnements qu'on trouve dans ce mémoire peuvent être rendus plus clairs au moyen d'une hypothèse qui est une de celles dont M. *Poincaré* s'est servi dans son exposition [1]) de la doctrine nouvelle et que je vais présenter sous une forme un peu différente. On peut supposer que tous les corps, y compris l'éther, sont imprégnés d'un fluide incompressible, dont le déplacement constitue les phénomènes electriques. Dans les corps diélectriques, les particules de ce fluide doivent être regardées comme liées à des positions d'équilibre, vers lesquelles elles sont ramenées dès que la force qui causait un déplacement cesse d'agir; dans les conducteurs, au contraire, il ne peut être question d'une position d'équilibre et ces corps

---

[1]) Poincaré, *Électricité et Optique* (1890), T. I. Chapitre II.

peuvent se retrouver dans leur état naturel après des déplacements du fluide très considérables.

Selon cette manière de voir, les composantes *u*, *v* et *w* du courant électrique ne sont autre chose que les quantités du fluide incompressible qui traversent des éléments de surface perpendiculaires aux axes des coordonnées, ces quantités étant toujours rapportées à l'unité de temps et à l'unité de surface. Ce que nous avons appelé la quantité d'électricité qui a franchi une surface quelconque pendant un certain temps est précisément la quantité du fluide incompressible qui a passé d'un côté de la surface à l'autre.

Pour cette dernière raison, il convient de donner le nom même d'*électricité* au fluide hypothétique, bien que la présence à elle seule de cette substance ne donne lieu à aucun phénomène particulier [1]).

Du reste, il ne faut pas attacher à l'hypothèse trop d'importance. Elle est utile en tant qu'elle nous permet de nous former une image de ce qui était d'abord caché sous les symboles mathémathiques, mais le langage de ces derniers sera toujours préféré par ceux qui désirent se borner à ce qui a été démontré par les observations et à ce qu'il y a de nécessaire dans les hypothèses.

C'est ainsi que les équations (4) et (5) ont pour la théorie de *Maxwell* une importance fondamentale. En élevant l'électricité au rang d'un fluide incompressible, on leur donne une interprétation qui ne laisse rien à désirer sous le rapport de la clarté, mais on dépasse le domaine des suppositions nécessaires.

§ 32. Voyons maintenant ce que c'est dans l'hypothèse du fluide, qu'une charge électrique. Un conducteur étant relié à un autre corps, à la terre par exemple, par un fil métallique, on peut faire agir des forces „électromotrices" sur le fluide électrique contenu dans ce fil. Si ces forces sont dirigées vers

---

[1]) M. *Poincaré* donne le nom de *fluide inducteur* au fluide incompressible qu'on suppose dans les diélectriques, et celui d'*électricité* au fluide contenu dans les conducteurs.

le conducteur, il en résultera une charge que je nommerai positive. Une nouvelle quantité d'électricité entrera dans le conducteur, mais, en vertu de l'incompressibilité, une quantité égale en dépassera la surface et chassera devant elle le fluide contenu dans le diélectrique ambiant. La charge sera mesurée soit par la quantité d'électricité qui a traversé une section du fil, soit par celle qui s'est déplacée dans le diélectrique vers l'extérieur d'une surface fermée quelconque enveloppant le conducteur.

En renversant la direction des forces électromotrices on obtient une charge négative. Le déplacement de l'électricité prendra alors dans tous les points du système une direction opposée à celle qu'il avait dans le cas précédent.

Le déplacement du fluide dans le diélectrique donne lieu à des forces qui cherchent à le ramener vers la position primitive et qu'on peut réunir sous le nom d'*élasticité diélectrique.* Si la charge est positive, ces forces tendront à repousser l'électricité vers le conducteur; il en résultera dans le fluide de ce dernier un surcroît de pression et un état permanent aura été atteint dès que la pression augmentée fait équilibre aux forces électromotrices dans le fil.

De la même manière, il y aura diminution de pression dans le conducteur, si la charge est négative. La pression peut cependant rester positive si dans l'état naturel du système elle avait une valeur suffisamment grande.

§ 33. Bien que nous ayons regardé le fluide électrique comme remplissant tout l'espace, il faut admettre que d'autres matières y peuvent également trouver place, soit que ces substances différentes soient des manifestations diverses d'une matière unique, soit qu'une constitution atomique leur permette de se pénétrer mutuellement. Il y a d'abord la matière pondérable; en second lieu, il faut que l'éther contienne une matière capable de retenir l'électricité et de la ramener vers la position d'équilibre; enfin les points matériels qui sont chargés des mouvements électromagnétiques doivent être regardés

comme n'appartenant pas au fluide électrique lui-même. On risquerait d'être entraîné en de vaines spéculations si on voulait se former une idée précise de ce mécanisme compliqué; aussi me bornerai-je aux distinctions que je viens d'indiquer. Inutile de dire que cette analyse des phènomènes n'est que provisoire et pourra être modifiée profondément dans une théorie plus avancée.

J'indiquerai par M à la fois la matière pondérable et la substance qui retient l'électricité contenue dans l'éther, par N la matière qui est le siège des mouvements électromagnétiques.

§ 34. Pour fixer les idées je supposerai que la matière M est immobile et qu'elle ne fait point partie du système auquel nous avons appliqué le principe de *d'Alembert*. Ce système est donc composé du fluide électrique et de la matière N. Les conditions qui en limitent la mobilité reviennent à l'incompressibilité du fluide, d'une part, et à ce que, d'autre part, tout mouvement de ce fluide donne lieu à un mouvement électromagnétique parfaitement déterminé.

Tout comme dans la mécanique ordinaire, certaines forces sont mises en jeu en vertu de ces liaisons et servent à les maintenir. Il existe une *pression* dans le fluide et entre celui-ci et la matière N un système de forces sur lequel je reviendrai bientôt.

Je supposerai que ces forces, qui sont provoquées par les liaisons et qui n'accomplissent aucun travail, sont les seules qui s'exercent entre les différentes parties du système: fluide électrique + matière N. Si, de plus, on admet que la matière M n'agit pas directement sur la matière N, il faudra dans la formule fondamentale (3) entendre par δA le travail des forces que le fluide électrique éprouve de la part de la matière M.

§ 35. Au paragraphe 20 nous avons admis l'existence de trois fonctions X, Y et Z, telles que le travail δA peut être calculé au moyen de la formule (19). Au point de vue où nous nous sommes placés maintenant, on peut voir dans ces fonctions, prises avec le signe négatif, les composantes de la

force avec laquelle la matière M agit sur l'unité d'électricité. En effet, lorsqu'on écrit $-X, -Y, -Z$ pour ces composantes, un raisonnement très-simple conduit à l'expression (19) pour le travail. Soit k la quantité invariable d'électricité, exprimée en unités électromagnétiques, qui se trouve dans l'unité de volume. Alors la force qui agit sur l'électricité contenue dans l'élément $d\tau$ a les composantes:

$$-X k\, d\tau,\quad -Y k\, d\tau,\quad -Z k\, d\tau, \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

et, si x, y et z sont les projections du déplacement infiniment petit d'une particule du fluide, le travail de cette force devient:

$$-(X\mathrm{x} + Y\mathrm{y} + Z\mathrm{z})\, k\, d\tau.$$

Mais évidemment

$$k\mathrm{x} = \mathfrak{e}_x,\quad k\mathrm{y} = \mathfrak{e}_y,\quad k\mathrm{z} = \mathfrak{e}_z.$$

La dernière expression devient par conséquent

$$-(X\mathfrak{e}_x + Y\mathfrak{e}_y + Z\mathfrak{e}_z)\, d\tau,$$

ce qui donne pour le système entier

$$\delta A = -\int (X\mathfrak{e}_x + Y\mathfrak{e}_y + Z\mathfrak{e}_z)\, d\tau.$$

§ 36. Il est clair quel sens il faut attacher maintenant aux équations (25) et (26). En changeant le signe des seconds membres, on trouve les composantes de l'élasticité diélectrique et de la résistance, c'est-à-dire de la force qui, dans les diélectriques, cherche à ramener vers sa position d'équilibre le fluide électrique, et du frottement qui s'oppose au mouvement de l'électricité dans les conducteurs. Pour les corps isotropes ces composantes deviennent.

$$-\nu f,\quad -\nu g,\quad -\nu h,$$
$$-\varkappa u,\quad -\varkappa v,\quad -\varkappa w.$$

Ce sont les valeurs auxquelles on est conduit par les hypothèses les plus simples qu'on puisse imaginer.

§ 37. S'il y a équilibre électrique on peut faire abstraction de la matière N. De plus, le principe de *d'Alembert* se réduit alors à celui des vitesses virtuelles; on arrive à la formule

fondamentale de l'électrostatique, l'équation (31), en exprimant que le travail des forces $-X$, $-Y$, $-Z$ est nul pour tous les déplacements imaginables du fluide électrique, par exemple pour une circulation dans un tube annulaire (§ 25). La valeur du travail δA peut être déduite des équations (19) et (25); il peut également être considéré comme la diminution de l'énergie potentielle (21). Cette dernière est comparable à l'énergie potentielle qui est développée dans les corps élastiques ordinaires par un dérangement de leur équilibre.

Du reste, les problèmes d'électrostatique admettent un autre traitement, qui consiste à exprimer directement l'équilibre des forces qui agissent sur le fluide électrique contenu dans un élément de volume $d\tau$. On a d'abord les forces (34); il y faut ajouter celles qui résultent de ce que la pression p du fluide n'a pas la même valeur tout autour de $d\tau$. Ces forces sont évidemment

$$-\frac{\partial p}{\partial x}d\tau,\ -\frac{\partial p}{\partial y}d\tau,\ -\frac{\partial p}{\partial z}d\tau,$$

et la condition cherchée s'exprime par les formules:

$$-Xk-\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ -Yk-\frac{\partial p}{\partial y}=0,\ -Zk-\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Soit p_0 la pression qui existe à l'état naturel du système, et définissons le potentiel par la formule

$$\varphi=\frac{p-p_0}{k};$$

les dernières équations se réduisent alors aux formules (33) que nous avons trouvées précédemment.

On voit ainsi que, dans l'hypothèse du fluide électrique, le potentiel est intimement lié à la pression. Cela est du reste fort naturel, car on comprend immédiatement que la pression peut jouer le rôle qu'on attribue au potentiel. Si deux conducteurs sont reliés l'un à l'autre par l'intermédiaire d'un fil métallique, il y aura équilibre lorsque la pression a la même

valeur dans les deux corps; s'il n'en est pas ainsi, le fluide électrique tendra à se mouvoir vers le côté où la pression a la valeur la plus basse.

Courants invariables.

§ 38. Lorsque deux points d'un corps métallique C sont reliés aux pôles d'un élément voltaïque, il s'établit un régime permanent, dans lequel u, v, w et par conséquent la force et l'induction magnétiques sont indépendants du temps. En toute rigueur, la théorie que nous avons développée jusqu'ici ne suffit pas à l'étude complète d'un tel cas, parce qu'elle ne tient aucun compte des forces électromotrices qui sont en jeu dans les combinaisons voltaïques. Cependant les équations (30) n'en sont pas moins applicables, pourvu seulement qu'on se borne aux parties de l'espace où il n'existe pas de forces électromotrices, par exemple au corps C et au diélectrique environnant. Mais, si a, b et c ne varient pas avec le temps, ces équations se réduisent à:

$$\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}=0.$$

On en déduit de nouveau le théorème que l'intégrale (32) a la même valeur pour toutes les lignes qu'on peut mener du point A au point P. Seulement, il faut ajouter la condition que les lignes dont il s'agit doivent être situées entièrement dans une région exempte de forces électromotrices.

Cela posé, on définira le potentiel φ de la même manière qu'au paragraphe 28, et on aura encore les formules (33), dans lesquelles on substituera les valeurs (26) si l'on veut étudier la distribution du courant électrique dans le corps C.

§ 39. Je n'insisterai pas sur les questions que présentent les courants permanents. Cependant, il importe de remarquer que la théorie du fluide électrique arrive d'une manière fort simple

aux équations fondamentales si on introduit deux hypothèses, à savoir, que la matière N n'a aucune influence sur un mouvement stationnaire de l'électricité et que le fluide électrique lui-même n'a qu'une masse insensible. Cette dernière hypothèse nous permet d'égaler à 0 la force résultante qui agit sur l'électricité contenue dans un élément de volume, sans nous préoccuper des changements en grandeur et en direction que la vitesse d'une particule déterminée du fluide électrique subit en général, même dans les courants constants. En vertu de la première hypothèse, les forces en question consistent dans celle qui dérive de la pression et qui a pour composantes:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} d\tau, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} d\tau, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} d\tau$$

et dans la force aux composantes:

$$-X k\, d\tau, \quad -Y k\, d\tau, \quad -Z k\, d\tau,$$

X, Y et Z ayant les valeurs (26). On revient donc aux formules (33).

Quant aux hypothèses précitées, la première est vérifiée par la théorie générale, vu que les seconds membres des équations (30) s'annulent, et la seconde est à la base de toute la théorie. En effet, si le fluide électrique lui-même avait une masse appréciable, il aurait aussi une énergie cinétique, dont la valeur — par unité de volume — serait proportionnelle à $(u^2+v^2+w^2)$. L'expression (12), qui se trouve en accord avec les expériences, serait donc inexacte ou du moins incomplète.

Le phénomène de la dispersion de la lumière semble indiquer l'existence de petites masses qui se déplacent en même temps que l'électricité, et introduisent dans l'expression de l'énergie cinétique un terme proportionnel à $(u^2 + v^2 + w^2)$, mais il faut admettre que ces masses ne sont pas assez grandes pour se faire sentir dans les expériences sur les courants qu'on peut observer comme tels.

Courants variables.

§ 40. Dans l'explication des phénomènes électrostatiques et de la distribution des courants permanents il n'y a pas lieu de faire intervenir les mouvements électromagnétiques. Dans le premier cas ces mouvements font défaut, dans le second cas ils ont une intensité invariable et sont par cela même incapables de réagir sur l'électricité. C'est dans les courants variables que se manifeste l'influence des mouvements électromagnétiques.

Ce n'est pas ici le lieu de nous étendre sur les phénomènes qui peuvent être expliqués au moyen des formules générales, d'autres physiciens en ayant amplement démontré l'applicabilité. On me permettra cependant de citer un seul exemple.

Figurons-nous qu'un condensateur aux armatures A et B ait été chargé; la première armature ayant reçu une charge positive. Il y a alors déplacement diélectrique suivant toutes les lignes de force électriques, mais principalement dans l'isolateur qui sépare les deux armatures. Ce déplacement est dirigé de A vers B; il donne lieu à une élasticité diélectrique dirigée en sens inverse, et l'équilibre exige que la pression à l'intérieur de A surpasse celle qui existe à l'armature B. C'est là la différence de potentiel. Que se passera-t-il maintenant si on relie par un fil conducteur les deux armatures? La différence de pression fait naître dans ce fil un courant qui décharge le condensateur, l'électricité qui se trouve dans la couche non-conductrice revenant vers sa position d'équilibre à mesure que la pression diminue dans l'armature A. Cependant, le courant engendré dans le fil métallique donne lieu à un mouvement électromagnétique dans le milieu ambiant et dans le fil lui-même. Si ce dernier n'avait aucune résistance, le mouvement serait accéléré tant qu'il y a une différence de pression qui pousse de A vers B le fluide contenu dans le fil, et au moment où cette différence se trouve épuisée, c'est-à-dire où le condensateur est sans charge, le mouvement électromagnétique aurait pris sa plus grande intensité. Cela étant, on comprend faci-

lement qu'en vertu des liaisons entre la matière N et l'électricité du fil cette dernière doit continuer de se mouvoir. Le condensateur reçoit ainsi une charge opposée à celle qu'il avait au commencement et en définitive on aura le phénomène bien connu de la décharge oscillatoire. Il est clair que la force qui ralentit le mouvement — le courant électrique et les mouvements électromagnétiques qui en dépendent — et finit par le renverser n'est autre chose que l'élasticité diélectrique excitée dans la couche isolante, et que le mouvement peut continuer d'autant plus longtemps dans une même direction qu'une plus grande masse est en jeu. La masse dont il s'agit doit être cherchée dans la matière N et non pas dans le fluide électrique.

§ 41. On pourrait comparer ce dernier à une tige dentée qui se déplace en sens longitudinal, et la matière N à une roue dentée s'engrenant avec cette tige; en effet, une résistance quelconque, qui s'oppose à un mouvement donné de ces organes, ne les amènera pas instantanément au repos; il faudra pour cela un temps d'autant plus long que la masse de la roue est plus considérable.

Lorsque, dans la mécanique ordinaire, on applique le principe de *d'Alembert* à un tel système — supposé libre de tout frottement — on emploie des formules dans lesquelles ne figure pas la pression existant entre les dents qui se trouvent en contact. D'une manière analogue, nous avons développé la théorie générale des mouvements électriques et nous pourrions établir la théorie spéciale de la décharge oscillante sans nous préoccuper de la réaction que l'électricité éprouve de la part de la matière N.

On ne saurait nier, toutefois, que cette méthode a quelque chose d'artificiel. Si l'on veut comprendre complètement le mouvement de la tige et de la roue dentées, on désirera se rendre compte non seulement du mouvement du système entier, mais aussi de celui de chaque organe considéré séparément. On ne sera satisfait qu'après avoir saisi la relation

entre la rotation de la roue et la force avec laquelle elle agit sur la tige. Relation bien simple, du reste, si la roue n'est soumise à aucune force extérieure et n'est liée à aucun autre organe; elle tendra alors à faire avancer la tige si son propre mouvement est ralenti, et elle s'opposera au déplacement de la tige dans le cas contraire.

Ces considérations nous conduisent à étudier séparément le mouvement du fluide électrique et à introduire les forces qui servent à maintenir les liaisons. On arrive ainsi à une méthode dans laquelle les forces qui seules accomplissaient un travail δA sont reléguées au second plan.

Force électrique.

§ 42. Considérons une quantité infiniment petite e du fluide électrique, située à l'intérieur d'un corps pondérable ou de l'éther. La force qu'elle éprouve de la part de la matière M a pour composantes:

$$-Xe, \quad -Ye, \quad -Ze,$$

et j'écrirai:

$$X'e, \quad Y'e, \quad Z'e$$

pour les composantes de la force qui est due au fluide ambiant et

$$X''e, \quad Y''e, \quad Z''e$$

pour celles de la force qui est exercée par la matière N.

Comme nous négligeons la masse du fluide, toutes ces forces doivent se tenir en équilibre, c'est-à-dire qu'on aura:

$$X' + X'' = X, \quad Y' + Y'' = Y, \quad Z' + Z'' = Z.$$

On voit donc que le vecteur (X, Y, Z) représente la force qui agit sur l'unité d'électricité en vertu des liaisons du système. Cette force fait équilibre avec celle qui est due à la matière M, c'est-à-dire avec l'élasticité diélectrique ou le frottement, et on dit souvent qu'elle sert à vaincre ces dernières forces et

qu'elle *produit* ainsi un déplacement diélectrique ou un courant. Suivant cet ordre d'idées, on regarde dans les équations (25), (26) et (30) comme la cause ce qui auparavant était considéré comme l'effet, et inversement. Jusqu'ici $-X$, $-Y$, $-Z$ étaient les forces avec lesquelles la matière M agit sur l'électricité dès qu'il y a un déplacement diélectrique ou un courant; ces forces déterminaient les accélérations que contiennent les seconds membres des formules (30). On peut dire tout aussi bien que ces dernières formules déterminent la force (X, Y, Z) qui est exercée sur l'unité du fluide par le fluide ambiant et par la matière N, et que cette force fait naître un déplacement diélectrique ou un courant suivant les lois qui sont exprimées par les équations (25) et (26).

Cette force (X, Y, Z) ou $\mathbf{R}$ (§ 26) est appelée la *force électrique*. Elle se compose de deux parties, dont la première, aux composantes:

$$X' = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y' = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z' = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad . \; . \; . \quad (35)$$

peut être appelée *force électrostatique* et la seconde (X'', Y'', Z'') *force inductrice*. Ces deux forces, que les anciennes théories attribuaient à des actions à distance, sont causées, l'une par la pression du fluide, l'autre par la réaction de la matière N.

Des formules (35) on tire:

$$\frac{\partial Z'}{\partial y} - \frac{\partial Y'}{\partial z} = \frac{\partial X'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial x} = \frac{\partial Y'}{\partial x} - \frac{\partial X'}{\partial y} = 0;$$

on voit donc que, dans les formules (30), on pourrait entendre par X, Y et Z les composantes de la force inductrice seule. Je continuerai cependant à désigner par ces lettres la force électrique totale.

Charge électrique au sein d'un isolateur.

§ 43. Je vais terminer par quelques additions cette étude des mouvements électriques dans les corps immobiles.

Et d'abord quelques mots sur les charges qu'on peut se figurer dans les diélectriques. Je dis „se figurer", parce qu'il nous est impossible de produire une telle charge dans un milieu entièrement dépourvu de conductibilité.

Dans un diélectrique qui se trouve à l'état naturel, chaque particule du fluide électrique occupe sa position d'équilibre. Or, on peut imaginer que, en dehors de ce fluide que le corps renferme dans son état naturel, il en contienne une certaine autre quantité, qui y trouve place en refoulant devant elle le fluide qui sans cela se trouverait dans sa position d'équilibre. Ce dernier déplacement est le déplacement diélectrique, et l'excès lui-même, que j'ai supposé, constitue une charge positive. Il est clair que, pour toute surface fermée, on aura:

$$\int \mathbf{D}_n \, d\sigma = E, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

la normale étant dirigée vers l'extérieur et la charge qui se trouve à l'intérieur de la surface étant représentée par E.

Une charge négative se conçoit d'une manière analogue; et la même équation peut être employée dans ce cas. Au lieu d'un excès, c'est maintenant un certain déficit en fluide électrique qu'il faut se figurer; si l'on admet qu'une partie quelconque de l'espace doit toujours rester remplie du fluide incompressible, il faut alors qu'à la surface σ il y ait un déplacement diélectrique tel que l'intégrale $\int \mathbf{D}_n \, d\sigma$ soit négative.

En appliquant l'équation (36) à un élément de volume et en indiquant par $\varrho \, d\tau$ la charge contenue dans cet élément, on trouve:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \varrho \, .$$

La quantité ϱ est appelée la *densité* de la charge électrique.

On voit donc que la distribution du déplacement diélectrique n'est plus solénoïdale. Tout de même, le courant électrique n'a pas perdu cette propriété. En effet, la charge électrique d'un élément de volume doit être regardée comme restant constante pendant toutes les variations possibles de f, g et h. On aura donc:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)=0,$$

ou bien:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

§ 44. Ce qui précède peut être mis sous une forme indépendante de l'hypothèse d'un fluide électrique. On se servira à cet effet des propositions ou hypothèses suivantes:

a. Dans chaque corps diélectrique il peut exister un dérangement de l'état naturel qui est de la nature d'un vecteur et qu'on nomme le déplacement diélectrique; à ce dérangement correspond une énergie potentielle qui est donnée par l'expression (21).

b. Les variations de ce déplacement diélectrique constituent le phénomène qu'on appelle un courant, les composantes du courant étant données par les formules (24).

c. La distribution du courant électrique est toujours solénoïdale. Par conséquent, l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$$

doit avoir en chaque point une valeur constante ϱ. Si cette valeur n'est pas 0, on dit qu'il y a une charge électrique et on nomme ϱ la densité de la charge.

Corps qui possèdent en même temps les propriétés d'un conducteur et celles d'un diélectrique.

§ 45. *Maxwell* a supposé qu'une force électrique peut provoquer dans le même corps un déplacement diélectrique et

un courant comparable à ceux qu'on considère dans la théorie ordinaire des conducteurs. Ces deux phénomènes seraient donnés en fonction de X, Y et Z par les formules (25) et (26), et les composantes du courant total, dont dépendent la force et l'induction magnétiques et par conséquent l'énergie cinétique du système seraient

$$u + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

M. *Potier* [1]) a remplacé cette hypothèse par une autre, qui revient également à une combinaison des propriétés que possèdent les corps conducteurs et les isolateurs. Je ne m'étendrai pas ici sur cette question, qu'on ne saurait traiter à fond qu'en étudiant assez minutieusement les propriétés optiques des métaux.

Forces électromotrices.

§ 46. Plusieurs causes, parmi lesquelles on peut citer des différences de température, des défauts d'homogénéité, et des actions chimiques, donnent lieu à des forces qui agissent sur l'électricité et dont on n'a pas tenu compte dans les équations des paragraphes précédents. Je réserverai à ces forces le nom de *forces électromotrices* et je représenterai leurs composantes par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$. Dans l'hypothèse du fluide électrique, ces lettres indiqueront les forces auxquelles se trouve soumise l'unité du fluide; ou plutôt, $\mathfrak{X}\, k\, d\tau$, $\mathfrak{Y}\, k\, d\tau$, $\mathfrak{Z}\, k\, d\tau$ seront les forces qui agissent sur le fluide contenu dans un élément de volume. Le vecteur $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sera regardé comme distribué sur un certain *espace*, dans lequel il a partout une valeur finie. Il est vrai que dans un grand nombre de cas cet espace se réduit à une couche très mince, telle que celle dans laquelle ont lieu les actions entre le zinc et l'acide sulfurique de nos éléments, et qu'on peut simplifier le problème en négligeant l'épaisseur de la couche et en supposant la force infiniment

---

[1]) Poincaré, *Electricité et Optique*, T. I, p. 190.

grande; mais c'est là un artifice mathématique auquel je ne m'arrêterai pas.

§ 47. Indépendamment de l'hypothèse du fluide électrique, on peut dire que le travail des forces électromotrices, qui correspond à un déplacement virtuel du système tel qu'il a été considéré aux paragraphes 15 et 16 est donné par l'intégrale :

$$\int (\mathfrak{X}\, \mathfrak{e}_x + \mathfrak{Y}\, \mathfrak{e}_y + \mathfrak{Z}\, \mathfrak{e}_z)\, d\tau.$$

Si l'on entend maintenant par X', Y', Z' les fonctions de f, g et h ou de u, v et w qui sont définies par les formules (25) et (26), c'est-à-dire si l'on pose:

$$\left.\begin{aligned} X' &= \nu_{x,x} f + \nu_{x,y}\, g + \nu_{x,z}\, h, \\ Y' &= \nu_{y,x} f + \nu_{y,y}\, g + \nu_{y,z}\, h, \\ Z' &= \nu_{z,x} f + \nu_{z,y}\, g + \nu_{z,z}\, h, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (37)$$

ou, dans le cas d'un conducteur,

$$\left.\begin{aligned} X' &= \varkappa_{x,x}\, u + \varkappa_{x,y}\, v + \varkappa_{x,z}\, w, \\ Y' &= \varkappa_{y,x}\, u + \varkappa_{y,y}\, v + \varkappa_{y,z}\, w, \\ Z' &= \varkappa_{z,x}\, u + \varkappa_{z,y}\, v + \varkappa_{z,z}\, w, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

on devra substituer dans la formule fondamentale (3):

$$\delta A = -\int \{ (X' - \mathfrak{X})\, \mathfrak{e}_x + (Y' - \mathfrak{Y})\, \mathfrak{e}_y + (Z' - \mathfrak{Z})\, \mathfrak{e}_z \}\, d\tau$$

et dans les équations de mouvement (29) et (30):

$$X = X' - \mathfrak{X}, \quad Y = Y' - \mathfrak{Y}, \quad Z = Z' - \mathfrak{Z}.$$

§ 48. Les mêmes choses peuvent être exprimées de la façon suivante.

Les formules (29) et (30) déterminent toujours les composantes X, Y et Z de la force électrique qui provient de l'incompressibilité du fluide électrique et des liaisons entre ce fluide d'un côté et les particules qui prennent part aux mouvements électromagnétiques de l'autre. Tant que des forces électromotrices n'existent pas, les forces X, Y, Z seules produiront des déplacements diélectriques ou des courants de conduction qui obéissent aux formules (25) ou (26). Dans le cas contraire, c'est une force $(X + \mathfrak{X},\ Y + \mathfrak{Y},\ Z + \mathfrak{Z})$ qui sera la cause de ces phénomènes; en posant alors

$$X + \mathfrak{X} = X', \quad Y + \mathfrak{Y} = Y', \quad Z + \mathfrak{Z} = Z',$$

on retombe sur les équations (37) et (38).

Vitesse de la lumière dans l'éther.

§ 49. On reconnaîtra facilement que nos formules sont au fond identiques à celles qu'on trouve chez *Maxwell* et chez MM. *Heaviside* et *Hertz* [1]). Elles doivent donc conduire aux résultats bien connus sur lesquels *Maxwell* a établi sa théorie électromagnétique de la lumière. Je ne m'étendrai pas ici sur les fondements de cette conception importante et je me bornerai à déduire de mes formules la vitesse de propagation de la lumière dans l'éther.

Pour ce milieu, les équations (25) prennent la forme:

$$X = \nu_0 f, \quad Y = \nu_0 g, \quad Z = \nu_0 h,$$

ν_0 étant la valeur commune des coefficients $\nu_{x,x}$, $\nu_{y,y}$, $\nu_{z,z}$; comme, de plus, la force et l'induction magnétiques se confondent en un seul vecteur, les formules (30) deviennent:

$$\nu_0 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$\nu_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

$$\nu_0 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}.$$

Des deux dernières on tire:

$$\nu_0 \left[\Delta f - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right),$$

ou bien, en ayant égard aux formules (22), (10) et (24),

$$\nu_0 \, \Delta f = 4\pi \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

---

[1]) Il faut citer encore un mémoire de *M. Cohn*, *Zur Systematik der Electricitätslehre* (*Wied. Ann. Bd.* 40, p. 625, 1890), dans lequel des équations semblables sont prises pour point de départ.

Cette équation et celles qui lui sont analogues donnent pour la vitesse de propagation des vibrations électriques transversales, c'est-à-dire pour la lumière,

$$V_0 = \sqrt{\frac{\nu_0}{4\pi}}.$$

On a donc

$$\nu_0 = 4\pi V_0^2,$$

et l'énergie potentielle de l'éther par unité de volume peut être représentée par

$$2\pi V_0^2 (f^2 + g^2 + h^2).$$

CHAPITRE II.

Phénomènes électromagnétiques dans des corps qui se trouvent en mouvement et qui entraînent l'éther contenu dans leur intérieur.

Valeur de l'énergie cinétique.

§ 50. Dans ce chapitre [1]) je nommerai *matière* tout ce qui peut être le siège des courants ou déplacements de l'électricité et des mouvements électromagnétiques. Ce nom sera donc appliqué à l'éther tout aussi bien qu'à la matière pondérable.

Dans les cas que nous allons étudier, il y aura deux classes de phénomènes, bien distinctes. D'une part, nous aurons affaire aux phénomènes électriques, tels qu'ils peuvent se présenter aussi dans des corps immobiles; d'autre part, il y aura un mouvement indépendant de toute action électrique et qui sera appelé le mouvement de la matière.

En suivant l'exemple donné par M. *Hertz* dans son second mémoire, je supposerai que l'éther contenu dans les espaces intermoléculaires d'un corps pondérable participe au mouvement de ce dernier. En d'autres termes, si à un moment quelconque on fait cesser subitement tous les mouvements qui constituent les phénomènes électriques, il restera un mouvement dans lequel tout ce qui est contenu dans un élément de volume est animé d'une vitesse commune.

Les composantes de cette vitesse seront représentées par ξ, η, ζ. Elles seront regardées comme des quantités données, le mouvement de la matière étant supposé connu. Du reste, je me bornerai aux cas où ξ, η, ζ sont des fonctions continues des coordonnées. Cela implique que deux corps qui se trouvent

---

[1]) Je me permets d'avertir le lecteur que les trois derniers chapitres de ce mémoire sont entièrement indépendants de celui-ci et du troisième.

en contact ne doivent pas glisser l'un sur l'autre et que, par exemple, un corps pondérable sphérique, placé dans un espace d'ou l'air a été éloigné, communique un certain mouvement à l'éther environnant, non seulement lorsque le centre se déplace, mais aussi lorsque le corps tourne autour de ce point.

§ 51. La position de la matière pourra être déterminée par un certain nombre de coordonnées générales, que je nommerai p_1, $p_2 \ldots p_k$, et il est clair que, s'il n'y avait aucun phénomène électrique, les composantes de la vitesse d'un point matériel quelconque P seraient données par des expressions de la forme

$$Q_1 \dot{p}_1 + Q_2 \dot{p}_2 + \ldots + Q_k \dot{p}_k,$$
$$Q'_1 \dot{p}_1 + Q'_2 \dot{p}_2 + \ldots + Q'_k \dot{p}_k,$$
$$Q''_1 \dot{p}_1 + Q''_2 \dot{p}_2 + \ldots + Q''_k \dot{p}_k,$$

les coefficients Q changeant avec la configuration du système.

Si, en revanche, la matière se trouvait en repos, mais qu'elle fût le siège de courants électriques, aux composantes u, v et w, on aurait pour les vitesses de ce même point P, comme au paragraphe 13,

$$\Sigma (A\, u + B\, v + C\, w),$$
$$\Sigma (A'\, u + B'\, v + C'\, w),$$
$$\Sigma (A''u + B''v + C''w).$$

Or, je supposerai que, dans le cas où les courants électriques u, v, w existent dans la matière qui est en mouvement, les composantes de la vitesse d'un point matériel ont les valeurs:

$$Q_1 \dot{p}_1 + \ldots + Q_k \dot{p}_k + \Sigma (A\, u + B\, v + C\, w),$$
$$Q'_1 \dot{p}_1 + \ldots + Q'_k \dot{p}_k + \Sigma (A'\, u + B'\, v + C'\, w),$$
$$Q''_1 \dot{p}_1 + \ldots + Q''_k \dot{p}_k + \Sigma (A''\, u + B''\, v + C''\, w).$$

§ 52. En partant de ces expressions, on trouve pour l'énergie cinétique une valeur de la forme :

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Le terme T_1 est ici indépendant des courants électriques, tandis que T_3 ne contient aucune des vitesses $\dot{p}_1 \ldots \dot{p}_k$ de la matière. Dans le second terme se trouvent les premières

puissances de ces vitesses multipliées par les mêmes puissances de u, v et w.

Dans les questions dont je m'occuperai, le terme T_1 ne joue aucun rôle et j'admettrai, comme le fit *Maxwell* dans sa théorie des circuits linéaires, que le terme T_2 s'annule. Je n'aurai donc à parler que de l'énergie T_3, que je représenterai dorénavant par T et qui est évidemment l'énergie que posséderait le système si la matière était mise en repos sans que les courants en fussent changés.

Cette énergie peut donc être calculée de la manière que j'ai exposée aux paragraphes 7—10. Il importe toutefois de remarquer que, si on effectuait ce calcul pour des époques successives, on obtiendrait pour T des valeurs différentes, non seulement parce que la distribution des courants ne restera pas la même, mais encore parce que, en vertu du mouvement de la matière, les coefficients μ changent d'un instant à l'autre dans un même point de l'espace.

Quantité d'électricité qui traverse une surface.

§ 53. Dans les considérations du chapitre précédent, les composantes du courant déterminaient les quantités d'électricité qui se déplacent à travers des surfaces ayant une position fixe dans l'espace. Dans le cas qui nous occupe actuellement, elles nous donnent d'une manière analogue la quantité d'électricité qui traverse une surface *qui est liée fixement à la matière et se déplace avec elle*, et dont, par conséquent, la forme et les dimensions changent continuellement [1]).

[1]) Je crois pouvoir présumer que tous les physiciens sont d'accord sur ce point. Si deux conducteurs sont reliés l'un à l'autre par un fil métallique dans lequel il y a un courant de l'intensité i, la charge de l'un subira par unité de temps une augmentation i, et celle de l'autre une diminution égale; il en sera ainsi quelle que soit la vitesse d'un mouvement qu'on imprime au système tout entier. On dira donc qu'une surface séparant les deux conducteurs est traversée dans l'unité de temps par une

Si un élément d'une telle surface coïncide à l'instant t avec un élément $d\sigma$ dont la normale a pour cosinus directeurs p, q, r, cet élément mobile sera traversé entre les moments t et $t + dt$ par la quantité d'électricité

$$(p u + q v + r w)\, d\sigma\, d t.$$

Selon la théorie de *Maxwell*, la distribution du courant électrique doit toujours être solénoïdale, ce qui s'exprime par les équations (4) et (5). Dans le chapitre précédent, cette condition impliquait l'égalité des quantités d'électricité qui entrent et qui sortent par une surface fermée, immobile dans l'espace; maintenant, la condition exige la même chose pour une surface fermée qui se déplace avec la matière.

§ 54. Comment concilier les idées que je viens d'exposer avec l'hypothèse d'un seul fluide électrique imprégnant toute la matière? Il faudra, en premier lieu, admettre qu'un courant électrique consiste, non pas dans le mouvement absolu d'un tel fluide, mais dans son mouvement relatif par rapport à la matière. En second lieu, il faudra renoncer à l'hypothèse de l'incompressibilité et lui substituer une autre plus générale. En effet, la matière peut se mouvoir sans qu'il y ait des courants électriques, et elle peut subir pendant ce mouvement un changement de densité. Dans ce dernier cas, le volume limité par une surface fermée qui passe toujours par les mêmes particules de la matière n'est pas invariable, et cependant aucune quantité d'électricité ne franchit cette surface. Au lieu de dire que le fluide électrique est incompressible, il faudra donc admettre qu'une partie déterminée de la matière en contient toujours la même quantité.

---

quantité d'électricité i; pour cette surface on peut prendre une section du fil qui passe continuellement par les mêmes particules métalliques. Mais, évidemment, la même chose ne sera pas, en général, vraie pour une surface immobile.

Application du principe de d'Alembert.

§ 55. C'est de nouveau l'équation générale (3) qui va nous fournir les équations du mouvement.

Comme il ne s'agit pas de trouver les lois qui régissent le mouvement de la matière, je me bornerai à des déplacements virtuels auxquels elle ne prend point part. Ce n'est que l'électricité et les particules animées des mouvements électromagnétiques qui en seront affectées, et les changements de position seront déterminés au moyen des quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$, absolument de la même manière que dans le chapitre précédent. Il est facile de s'assurer que la variation $\delta' T$ est toujours donnée par la formule

$$\delta' T = \int (F \mathfrak{e}_x + G \mathfrak{e}_y + H \mathfrak{e}_z)\, d\tau, \quad \ldots \ldots \quad (39)$$

les fonctions F, G et H étant déterminées, comme auparavant, par les formules (14).

§ 56. Cependant, dans le calcul de la dérivée

$$\frac{d\,\delta' T}{d t},$$

je ne supposerai plus qu'à l'instant $t + dt$ les quantités $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ aient les mêmes valeurs qu'à l'instant t. Il est vrai que, tant que la distribution du vecteur $\mathfrak{e}$ demeure solénoïdale, on est entièrement libre dans le choix des composantes et qu'elles pourraient par conséquent être prises indépendantes du temps, mais le calcul du terme δT dans la formule (3) en deviendrait assez difficile.

Il est plus commode de donner aux composantes relatives au temps $t + dt$ de telles valeurs $\mathfrak{e}'_x$, $\mathfrak{e}'_y$, $\mathfrak{e}'_z$, qu'un élément de surface quelconque, qui se déplace avec la matière, soit traversé par la même quantité d'électricité en vertu du déplacement $(\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z)$ à l'instant t et en vertu du déplacement $(\mathfrak{e}'_x, \mathfrak{e}'_y, \mathfrak{e}'_z)$ à l'instant $t + dt$.

On reconnaîtra immédiatement, d'abord, que le vecteur $(\mathfrak{e}'_x, \mathfrak{e}'_y, \mathfrak{e}'_z)$ se trouve ainsi complètement déterminé dès que le vecteur $(\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z)$ a été choisi, le mouvement de la matière

pendant le temps $d t$ étant connu, et, en second lieu, que la distribution de l'un des deux vecteurs est solénoïdale si l'autre jouit de cette propriété.

§ 57. Grâce au choix que je viens de faire, le terme δT dans l'équation fondamentale s'annule, si du moins on adopte l'hypothèse suivante, qui n'est autre chose qu'une généralisation de celle de *Maxwell* (§ 2):

Si, après des mouvements quelconques, la matière est ramenée à sa configuration primitive, et si, dans le cours de ces mouvements, chaque élément de surface qui est fixement lié à la matière a été traversé par des quantités égales d'électricité en directions opposées, tous les points du système se retrouveront dans leurs positions primitives.

§ 58. Pour démontrer que cette hypothèse donne effectivement

$$\delta T = 0,$$

je donne aux signes W_1, W_2, W'_1, W'_2 les mêmes significations qu'au paragraphe 19 et je me représente de nouveau la succession des déplacements

$$W'_2 \rightarrow W_2,\ W_2 \rightarrow W_1,\ W_1 \rightarrow W'_1\,; \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

le mouvement varié sera alors celui qui ramène le système à la configuration W'_2 dans un temps $d t$.

Or, on voit immédiatement que le mouvement varié de la matière ne diffère pas du mouvement réel.

D'un autre côté, un élément de surface quelconque, qui se déplace avec la matière, est traversé par des quantités égales d'électricité pendant les déplacements $W_1 \rightarrow W'_1$ et $W_2 \rightarrow W'_2$. Si donc, après avoir donné au système les déplacements (40), on fait en sorte qu'un tel élément soit traversé par la même quantité d'électricité que dans le déplacement $W_1 \rightarrow W_2$, la somme algébrique des quantitées d'électricité qui ont successivement traversé l'élément sera 0 et, en vertu de notre hypothèse, la position W'_2 se sera rétablie. Il en résulte que les composantes du courant ont dans le mouvement varié les mêmes valeurs que dans le mouvement réel et que,par conséquent,

$$\delta T = 0.$$

§ 59. Soit de nouveau

$$-\int (X\mathfrak{e}_x + Y\mathfrak{e}_y + Z\mathfrak{e}_z)\, d\tau$$

le travail des forces pendant le déplacement virtuel ($\mathfrak{e}_x, \mathfrak{e}_y, \mathfrak{e}_z$); alors l'équation (3) devient:

$$-\int (X\mathfrak{e}_x + Y\mathfrak{e}_y + Z\mathfrak{e}_z)\, d\tau = \frac{d}{dt}\int (F\mathfrak{e}_x + G\mathfrak{e}_y + H\mathfrak{e}_z)\, d\tau \; (41).$$

Supposons que le vecteur $\mathfrak{e}$ soit distribué de la façon particulière indiquée au paragraphe 25. Si l'on fait se mouvoir avec la matière le tube annulaire dont il fut question dans ce paragraphe, l'axe coïncidera après le temps dt avec une nouvelle ligne fermée et, au lieu de ω, le tube aura une section droite ω'. D'après ce qui a été dit sur $\mathfrak{e}'_x, \mathfrak{e}'_y, \mathfrak{e}'_z$, il faudra que le vecteur $\mathfrak{e}'$, dont ces quantités sont les composantes, soit borné au nouveau tube, qu'il ait la direction du nouvel axe s' et que le produit $\mathfrak{e}'\omega'$ soit partout égal au produit $\mathfrak{e}\omega$ dans le tube non déplacé.

Or l'intégrale

$$\int (F\mathfrak{e}_x + G\mathfrak{e}_y + H\mathfrak{e}_z)\, d\tau$$

prend (§ 25) à l'instant t la valeur:

$$\mathfrak{e}\omega \int (Fp + Gq + Hr)\, ds,$$

et à l'instant $t + dt$ elle devient

$$\mathfrak{e}'\omega' \int (Fp + Gq + Hr)\, ds',$$

l'intégrale étant étendue à la ligne primitive dans la première expression et à la ligne déplacée dans la seconde, et les valeurs de F, G et H se rapportant respectivement aux moments t et $t + dt$.

Il s'ensuit qu'au lieu de

$$\frac{d}{dt}\int (F\mathfrak{e}_x + G\mathfrak{e}_y + H\mathfrak{e}_z)\, d\tau$$

il est permis d'écrire

$$\mathbf{e}\,\omega \frac{d}{dt}\int (Fp + Gq + Hr)\, ds,$$

où le signe d indique l'accroissement total de l'intégrale causé par la variation de F, G et H et par le déplacement de la ligne s.

Le premier membre de l'équation (41) se transforme en

$$-\mathbf{e}\,\omega \int (Xp + Yq + Zr)\, ds,$$

et la formule devient:

$$-\int (Xp + Yq + Zr)\, ds = \frac{d}{dt}\int (Fp + Gq + Hr)\, ds.$$

Elle se simplifie encore si l'on conçoit une surface σ limitée par la ligne s et se déplaçant également avec la matière. En vertu des relations (14), on a

$$\int (Fp + Gq + Hr)\, ds = \int \mathbf{B}_n\, d\sigma,$$

ce qui donne:

$$-\int (Xp + Yq + Zr)\, ds = \frac{d}{dt}\int \mathbf{B}_n\, d\sigma \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Ici encore, le signe d indique le changement total de l'intégrale. Pour le calculer, il faudra tenir compte, d'une part, du changement de l'induction magnétique, et, d'autre part, du déplacement de la surface σ.

§ 60. De la formule (42) aux équations définitives du mouvement il n'y a qu'un pas. On peut d'abord admettre qu'à l'instant t la surface σ coïncide avec un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles à deux axes des coordonnées et qui n'est pas coupé par une surface de discontinuité. En regardant toutes les quantités variables comme des fonctions de t et des coordonnées x, y, z d'un *point immobile*, on trouve ainsi (voir § 61)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}&=\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}(\eta a-\xi b)-\frac{\partial}{\partial z}(\xi c-\zeta a)+\\
&\qquad+\xi\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}&=\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}(\zeta b-\eta c)-\frac{\partial}{\partial x}(\eta a-\xi b)+\\
&\qquad+\eta\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}&=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\xi c-\zeta a)-\frac{\partial}{\partial y}(\zeta b-\eta c)+\\
&\qquad+\zeta\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

En second lieu, on peut donner à la surface σ la forme d'une bande étroite comprise entre deux lignes qui se trouvent de part et d'autre d'une surface de discontinuité. Si ces lignes s'approchent de plus en plus d'une même ligne située dans la surface, l'intégrale

$$\int \mathbf{B}_n \, d\sigma$$

tend vers la limité 0 et on est conduit à la condition

$$(\mathbf{R}_h)_1 = (\mathbf{R}_h)_2,$$

$\mathbf{R}$ étant la „force électrique" (X, Y, Z) et h indiquant une direction quelconque dans la surface de discontinuité.

Les équations (43) expriment la même chose que les formules (1_a) du second mémoire de M. *Hertz.* Elles n'en diffèrent que par la notation, le choix des unités et la position relative des axes des coordonnées.

Du reste, comme nous n'avons nulle part supposé l'existence de „magnétisme libre", nous pourrions encore simplifier les formules en y substituant.

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}=0.$$

§ 61. Il suffira d'indiquer rapidement comment on arrive à la première des équations (43).

Figurons-nous qu'à l'instant t la surface σ se confond avec

un élément rectangulaire $d\,y\,d\,z$, perpendiculaire à l'axe des x et situé au point (x, y, z); alors, à l'instant $t + d\,t$, la surface passera par le point $(x + \xi\,d\,t,\ y + \eta\,d\,t,\ z + \zeta\,d\,t)$, la normale fera avec l'axe des x un angle infiniment petit et avec les axes des y et des z des angles

$$\tfrac{1}{2}\pi + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,d\,t \text{ et } \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\partial \xi}{\partial z}\,d\,t,$$

et l'aire de la surface sera devenue

$$d\,\sigma' = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) d\,t \right\} d\,y\,d\,z.$$

Désignons par a la valeur de la première composante de l'induction magnétique au point (x, y, z) et à l'instant t, et par

$$a' = a + \left(\frac{\partial a}{\partial t} + \xi\frac{\partial a}{\partial x} + \eta\frac{\partial a}{\partial y} + \zeta\frac{\partial a}{\partial z}\right) d\,t$$

la valeur de cette même composante au point $(x + \xi\,d\,t,\ y + \eta\,d\,t,\ z + \zeta\,d\,t)$ et au moment $t + d\,t$.

Alors la valeur de l'intégrale $\int \mathbf{B}_n\,d\,\sigma$, qui est d'abord

$$a\,d\,y\,d\,z,$$

devient au bout de l'intervalle $d\,t$:

$$\left[a + \left\{\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \xi\frac{\partial a}{\partial x} + \eta\frac{\partial a}{\partial y} + \zeta\frac{\partial a}{\partial z}\right) - \left(b\frac{\partial \xi}{\partial y} + c\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\right\} d\,t\right] d\,\sigma'.$$

Valeur de la force électrique.

§ 62. Tant qu'il s'agit de corps conducteurs, dans lesquels la „résistance" seule s'oppose au mouvement de l'électricité, on n'a rien à changer à ce qui a été dit dans le chapitre précédent. Les diélectriques, au contraire, demandent de nouvelles considérations.

Conformément à l'idée énoncée au paragraphe 53, il est naturel d'admettre que le dérangement électrique de l'état naturel d'un isolateur est déterminé dès qu'on connaît, pour chaque élément de surface fixement lié à la matière, la quan-

tité totale d'électricité par laquelle il a été traversé à partir d'un moment où le corps se trouva encore à l'état naturel.

Je désignerai par

$$f\,d\,y\,d\,z$$

la valeur de cette quantité pour un élément de surface qui coïncide à l'instant t avec un rectangle dont les côtés $d\,y$ et $d\,z$ sont respectivement parallèles aux axes $O\,Y$ et $O\,Z$. En définissant les quantités g et h d'une manière analogue, on peut dire que le diélectrique aurait été amené à l'état où il se trouve actuellement si, après avoir donné à la matière la position qu'elle occupe à l'instant t, on eût fait naître un déplacement diélectrique $\mathbf{D}$, aux composantes f, g, h. L'énergie potentielle par unité de volume sera donc toujours donnée par l'expression (21) et le travail des forces pourra être représenté comme il a été fait au paragraphe 59, si on prend pour $\dot{X}$, Y et Z les valeurs (25). En effet, la matière elle-même ne prend point part au déplacement virtuel que nous avons imposé au système; les quantités f, g et h, telles que je viens de les définir, recevront par conséquent dans ce déplacement les accroissements $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

Relations entre les composantes du courant et celles du déplacement diélectrique.

§ 63. Les formules (24) ne sont plus applicables aux diélectriques en mouvement. Il leur faut substituer des équations moins simples auxquelles on arrive par le raisonnement suivant. La définition que j'ai donnée dans le dernier paragraphe conduit à représenter par

$$\int \mathbf{D}_n\,d\,\sigma$$

la quantité d'électricité qui, à partir de l'état naturel, a traversé une surface limitée quelconque, liée à la matière.

La dérivée

$$\frac{d}{d\,t}\int \mathbf{D}_n\, d\,\sigma,$$

prise dans le même sens que la dérivée

$$\frac{d}{d\,t}\int \mathbf{B}_n\, d\,\sigma$$

qu'on trouve dans la formule (42), sera donc la quantité d'électricité qui traverse la surface par unité de temps, cette surface se déplaçant toujours avec la matière.

Pour calculer les valeurs de $u\,d\,y\,d\,z$, $v\,d\,z\,d\,x$, $w\,d\,x\,d\,y$, il suffira donc de rechercher ce que devient cette dérivée, si à l'instant t la surface $d\,\sigma$ coïncide avec un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles à deux axes des coordonnées. En suivant la marche qui a été indiquée au paragraphe 61, on trouvera:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\eta f - \xi g) - \frac{\partial}{\partial z}(\xi h - \zeta f) + \xi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

$$v = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta g - \eta h) - \frac{\partial}{\partial x}(\eta f - \xi g) + \eta\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\xi h - \zeta f) - \frac{\partial}{\partial y}(\zeta g - \eta h) + \zeta\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right).$$

Si l'on introduit ces valeurs dans les équations (10) celles-ci deviennent identiques aux formules (1_b) établies par M. *Hertz* dans son second mémoire.

Après avoir ainsi reproduit les formules fondamentales de M. *Hertz*, il est juste de mentionner que ce n'est qu'après avoir lu son mémoire que j'ai entrepris cette étude des corps en mouvement. J'avais ainsi l'avantage de connaître d'avance les résultats qu'il faudrait chercher à obtenir.

CHAPITRE III.

Examen d'une hypothèse qui a été faite aux chapitres précédents.

§ 64. Il n'est pas inutile de considérer de plus près la supposition dont *Maxwell* s'est servi dans sa théorie des circuits linéaires et que j'ai reproduite, sous des formes plus générales, aux paragraphes 18 et 57.

Même dans le cas que j'ai traité au premier chapitre, cette hypothèse n'est pas aussi plausible qu'on pourrait le croire au premier abord. En effet, il y a dans la mécanique ordinaire des cas bien simples où une supposition analogue conduirait à des résultats erronés.

Considérons, par exemple, le mouvement d'un fluide incompressible dont la densité est ϱ. Désignons par $u\,d\sigma\,dt$, $v\,d\sigma\,dt$, $w\,d\sigma\,dt$ les quantités du fluide, exprimées par le volume qu'elles occupent, qui, pendant le temps dt, traversent des éléments de surface, respectivement perpendiculaires à OX, OY et OZ et eux-mêmes immobiles; u, v et w seront alors les composantes du courant. Représentons par $X\,d\tau$, $Y\,d\tau$, $Z\,d\tau$ les composantes de la force extérieure qui agit sur un élément de volume, et cherchons à établir les équations du mouvement en partant de la formule générale (3). Les variables u, v, w, X, Y et Z seront regardées comme des fonctions de t et des coordonnées x, y, z d'un point immobile.

Un déplacement virtuel peut être défini au moyen des quantités infiniment petites du fluide qui traversent des éléments de surface perpendiculaires aux axes des coordonnées; rapportées à l'unité de surface et exprimées par le volume du liquide, elles seront indiquées par $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$. Elles doivent satisfaire à la même condition que les quantités analogues du premier chapitre et il est évidemment permis de les regarder comme indépendantes du temps. On aura alors:

$$\frac{d\,\delta' T}{d\,t} = \varrho \int \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{e}_x + \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{e}_y + \frac{\partial w}{\partial t} \mathrm{e}_z \right) d\,\tau.$$

§ 65. Si, après des mouvements quelconques pendant lesquels chaque élément de surface immobile a été en somme traversé dans des directions opposées par des quantités égales du fluide, chaque particule se retrouvait dans sa position primitive, on pourrait démontrer que $\delta T = 0$, comme dans le premier chapitre. Cependant cette hypothèse ne se vérifie pas et $\delta\, T$ prend une valeur que nous allons calculer.

Donnons à W_1, W_2, W_1', W_2' la signification que nous connaissons déjà et nommons x, y et z les coordonnées d'une particule du fluide dans la position W_1. Alors les coordonnées de ce point seront:
dans la position W_2:

$$x + u\,d\,t, \quad y + v\,d\,t, \quad z + w\,d\,t,$$

dans la position W_1':

$$x + \mathrm{e}_x, \quad y + \mathrm{e}_y, \quad z + \mathrm{e}_z,$$

et dans la position W_2':

$$x + u\,d\,t + \mathrm{e}_x + \left(\frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial z} w \right) d\,t,$$

$$y + v\,d\,t + \mathrm{e}_y + \left(\frac{\partial \mathrm{e}_y}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{e}_y}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{e}_y}{\partial z} w \right) d\,t,$$

$$z + w\,d\,t + \mathrm{e}_z + \left(\frac{\partial \mathrm{e}_z}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{e}_z}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{e}_z}{\partial z} w \right) d\,t.$$

Il a fallu ajouter les termes:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{e}_x}{\partial z} w \right) d\,t, \text{ etc.}$$

parce qu'il s'agissait des valeurs de e_x, e_y, e_z au point où la particule considérée se trouve dans la position W_2.

Les expressions précédentes donnent pour les vitesses de la particule dans le mouvement varié:

$$\left.\begin{aligned} &u+\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial x}u+\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y}v+\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial z}w,\\ &v+\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial x}u+\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial y}v+\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial z}w,\\ &w+\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial x}u+\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial y}v+\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z}w. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

Or, si en un même point de l'espace les vitesses étaient les mêmes dans le mouvement varié et dans le mouvement réel, on aurait dû trouver au lieu de ces expressions:

$$u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{e}_z, \text{ etc.}$$

§ 66. Après avoir obtenu les valeurs (44) on peut procéder comme il suit. On a d'abord

$$\begin{aligned} \delta T=\varrho\int\Big\{&\left(u^2\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial x}+uv\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y}+uw\frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial z}\right)+\\ &+\left(uv\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial x}+v^2\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial y}+vw\frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial z}\right)+\\ &+\left(uw\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial x}+vw\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial y}+w^2\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z}\right)\Big\}\,d\tau. \end{aligned}$$

Ici, on peut intégrer par parties. En supposant qu'aux limites du fluide $\mathbf{e}_x=\mathbf{e}_y=\mathbf{e}_z=0$ et se rappelant que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

on trouve:

$$\begin{aligned} \delta T=-\varrho\int\Big\{&\mathbf{e}_x\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\\ &+\mathbf{e}_y\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\\ &+\mathbf{e}_z\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Big\}\,d\tau. \end{aligned}$$

En fin de compte, l'équation (3) devient:

$$\int (X \mathfrak{e}_x + Y \mathfrak{e}_y + Z \mathfrak{e}_z)\, d\tau =$$

$$= \varrho \int \Big\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathfrak{e}_x + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathfrak{e}_y + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathfrak{e}_z \Big\}\, d\tau.$$

Il est facile d'en déduire les équations du mouvement sous leur forme ordinaire. On s'apercevra que l'hypothèse en question, loin d'être vraie, conduirait à l'omission des termes $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$, etc.

§ 67. Si cette hypothèse ne peut pas être admise dans le cas d'un fluide ordinaire, elle ne pourra non plus être appliquée au fluide électrique. Cependant, cela n'empêche pas que nos équations du mouvement ne puissent être exactes. En effet, la masse de ce dernier fluide a été supposée négligeable, et dans le calcul de la variation δT il ne s'agissait que de l'énergie cinétique qui est propre aux mouvements électromagnétiques; il suffira donc que les points matériels qui sont chargés de ces mouvements, et qu'il ne faut pas confondre avec l'électricité elle-même, jouissent de la propriété de revenir aux mêmes positions si pour chaque élément de surface la somme algébrique des quantités d'électricité par lesquelles il a été traversé, est 0.

Or, on est entièrement libre d'essayer sur le mécanisme qui produit les phénomènes électromagnétiques telle supposition qu'on voudra, et tout en reconnaissant la difficulté d'imaginer un mécanisme qui possède la propriété désirée, il me semble qu'on n'a pas le droit d'en nier la possibilité.

§ 68. Cependant, cette hypothèse que nous discutons, est-elle vraiment inévitable si l'on veut voir s'annuler le terme δT, ce qui semble nécessaire pour obtenir des équations

qui s'accordent avec les expériences? Je vais démontrer, en me bornant pour le moment aux corps immobiles, qu'on peut au besoin recourir à une autre suppositon.

Revenons pour cela aux formules (16). Les coefficients $A, B, C, A', \ldots$ qu'elles contiennent changeront avec la configuration du système et on peut indiquer par δA, δB, δC, $\delta A', \ldots$ les changements qui surviennent pendant le déplacement $W_1 \rightarrow W_1'$, et par dA, dB, dC, $dA' \ldots$ ceux qui ont lieu pendant le mouvement réel $W_1 \rightarrow W_2$.

Cela établi, on peut écrire pour la première coordonnée d'une particule déterminée:
dans la position W_1: x;
dans la position W_2: $x + \Sigma(Au + Bv + Cw)\,dt$;
dans la position W_1': $x + \Sigma(A\,\mathfrak{e}_x + B\,\mathfrak{e}_y + C\,\mathfrak{e}_z)$, et enfin
dans la position W_2':

$$x + \Sigma(Au + Bv + Cw)\,dt + \\ + \Sigma(A\,\mathfrak{e}_x + B\,\mathfrak{e}_y + C\,\mathfrak{e}_z) + \Sigma(dA.\,\mathfrak{e}_x + dB.\,\mathfrak{e}_y + dC.\,\mathfrak{e}_z).$$

Il en résulte que le déplacement de la particule dans la direction des x est, pendant le mouvement varié:

$$\Sigma(Au + Bv + Cw)\,dt + \Sigma(dA.\,\mathfrak{e}_x + dB.\,\mathfrak{e}_y + dC.\,\mathfrak{e}_z)\,. \quad (45)$$

D'un autre côté, on peut indiquer facilement quel serait ce déplacement si, à partir de la position W_1', il existait dans le système, pendant l'intervalle dt, un système de courants (u, v, w) identique à celui qu'on trouve dans le mouvement réel. A la position W_1' correspondent les valeurs:

$$A + \delta A,\ B + \delta B, \ldots\ldots$$

et le déplacement qu'il s'agit d'indiquer serait donc:

$$\Sigma(Au + Bv + Cw)\,dt + \Sigma(\delta A.\,u + \delta B.\,v + \delta C.\,w)\,dt \quad (46).$$

§ 69. Si les expressions (45) et (46) sont identiques, et s'il en est de même des expressions analogues par lesquelles on peut représenter des déplacements parallèles à OY et OZ, le mouvement varié sera celui auquel se rapporte l'expression (46) et on aura $\delta T = 0$, parce que l'énergie cinétique est déterminée par les composantes du courant. L'hypothèse du

paragraphe 18 conduit à cette simplification parce qu'elle donne lieu à l'égalité :

$$\Sigma\,(d\,A.\,\mathfrak{e}_x + d\,B.\,\mathfrak{e}_y + d\,C.\,\mathfrak{e}_z) = \Sigma\,(\delta\,A.\,u + \delta\,B.\,v + \delta\,C.\,w)\,d\,t.$$

Pourtant, il n'est pas nécessaire que cette égalité existe. Les vitesses de la particule considérée, dans le mouvement réel, sont

$$\dot{x} = \Sigma\,(A\,u + B\,v + C\,w),$$
$$\dot{y} = \Sigma\,(A'\,u + B'\,v + C'\,w),$$
$$\dot{z} = \Sigma\,(A''\,u + B''\,v + C''\,w),$$

et si les vitesses dans le mouvement varié sont $\dot{x} + \delta\dot{x}$, $\dot{y} + \delta\,\dot{y}$, $\dot{z} + \delta\,\dot{z}$, l'expression (45) donne

$$\delta\,\dot{x} = \Sigma\left(\frac{d\,A}{d\,t}\,\mathfrak{e}_x + \frac{d\,B}{d\,t}\,\mathfrak{e}_y + \frac{d\,C}{d\,t}\,\mathfrak{e}_z\right) \quad \ldots\ldots \quad (47).$$

Les variations $\delta\,\dot{y}$ et $\delta\,\dot{z}$ peuvent être mises sous une forme analogue, et on peut calculer la valeur de

$$\delta\,T = \Sigma\,m\,(\dot{x}\,\delta\,\dot{x} + \dot{y}\,\delta\,\dot{y} + \dot{z}\,\delta\,\dot{z}) \quad \ldots\ldots \quad (48).$$

Voici maintenant un système d'hypothèses qui donnent pour cette variation la valeur 0 :

a. Il y a deux systèmes de particules qui prennent part aux mouvements électromagnétiques, systèmes qui seront indiqués par les lettres N et N′.

b. A chaque moment, une particule quelconque appartenant à l'un de ces systèmes se trouve dans le voisinage immédiat d'une particule de masse égale qui fait partie de l'autre.

c. Les deux systèmes ont toujours des mouvements égaux en sens inverse, ou, pour nous exprimer plus exactement :

Si deux mouvements de même durée commencent avec les mêmes positions initiales et ne se distinguent que par le signe des composantes du courant électrique, et si P et P' sont des points appartenant aux systèmes **N** et **N′** et coïncidant dans la configuration initiale, le point P' atteindra, dans le second mouvement, la même position finale que le point P dans le premier mouvement.

Cela implique évidemment qu'au moment de la coïncidence les points P et P' ont des vitesses égales et opposées. En effet, en changeant les signes de u, v, w, on renverse la vitesse du point P (§ 13); mais, selon la dernière hypothèse, cette vitesse doit alors devenir égale à celle qu'avait d'abord le point P'.

Remarquons encore que, dans le cours d'un certain mouvement, ce sera chaque fois une nouvelle particule P' qui coïncide avec une particule déterminée P. Deux roues juxtaposées, qui ont des rotations égales et opposées autour du même axe, peuvent servir d'exemple.

§ 70. Pour démontrer que ces hypothèses conduisent à

$$\delta T = 0,$$

nous allons comparer deux mouvements différents du système. Les lettres W_1, W_2, W_1', W_2' seront appliquées au premier cas et les signes (W_1), (W_2), (W_1') et (W_2') indiqueront les mêmes choses pour le second cas.

Supposons que les positions W_1 et (W_1) soient identiques et que, dans les deux mouvements, chacune des quantités u, v, w, $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ ait les mêmes valeurs, mais des signes opposés.

Alors les mouvements $W_1 \rightarrow W_1'$ et $(W_1) \rightarrow (W_1')$ se distingueront l'un de l'autre de la manière qui a été indiquée dans la troisième hypothèse du paragraphe précédent; il en sera de même des mouvements qui consistent, l'un dans la succession des déplacements $W_1 \rightarrow W_2$ et $W_2 \rightarrow W_2'$, l'autre dans la succession de $(W_1) \rightarrow (W_2)$ et $(W_2) \rightarrow (W_2')$. Il en résulte que, si deux particules P et P' coïncident dans la position W_1 ou (W_1), l'une de ces particules se déplacera dans le mouvement varié $W_1' \rightarrow W_2'$ de la même manière que l'autre dans le mouvement varié $(W_1') \rightarrow (W_2')$; comme, de plus, les masses de P et de P' sont égales, le mouvement varié aura, dans les deux cas, la même énergie cinétique.

On trouve donc:

$$\delta T = (\delta T), \quad \quad (49)$$

où les deux membres se rapportent aux deux cas que nous voulions comparer l'un à l'autre.

D'un autre côté, on peut appliquer les formules (47) et (48). On se rappellera que, pour une particule déterminée qui prend part aux mouvements électromagnétiques, les coefficients A, B, C, etc. sont des fonctions des coordonnées.

Les dérivées $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dB}{dt}$, $\frac{dC}{dt}$, etc. qu'on trouve dans les équations (47) et dans les expressions analogues pour $\delta \dot{y}$, $\delta \dot{z}$ seront, par conséquent, des fonctions homogènes et linéaires de u, v, w, et comme il en est de même de $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, la formule (48) conduit à

$$\delta T = -(\delta T),$$

ce qui, avec l'équation (49), donne

$$\delta T = 0.$$

§ 71. Les hypothèses dont je viens de me servir introduisent dans la théorie un certain dualisme, auquel on est amené si souvent par l'étude des phénomènes électriques. En effet, elles ressemblent un peu à l'ancienne idée de deux fluides électriques qui se déplacent avec des vitesses égales et opposées. Seulement, il ne s'agit pas maintenant de fluides électriques, mais des mouvements électromagnétiques. Si, comme il est fort probable, ces mouvements sont des rotations autour des lignes de force magnétiques, les hypothèses reviennent à ce que, dans un espace quelconque, il y a toujours des rotations de directions opposées et qu'il ne peut exister aucun effet qui serait causé par des rotations dans une seule direction.

§ 72. Dans les cas où la „matière" elle-même (Chap. II) se déplace, l'hypothèse du paragraphe 57 donne lieu à quelques remarques nouvelles.

Soit s un circuit linéaire et fermé, dont le mouvement est tellement restreint que la position peut être déterminée à l'aide d'un seul paramètre p; soient, de plus, ε la quantité d'électricité qui, à partir d'un certain moment fixe, a traversé

une section passant toujours par le même point du conducteur, et x la première coordonnée d'un des points matériels P du milieu. L'hypothèse exige que l'on ait:

$$x = f(p, \varepsilon).$$

Cela posé, je donne au système, l'un après l'autre, les déplacements suivants:

a. Tandis que le conducteur se trouve dans le voisinage du point P (position I), une quantité d'électricité ε est amenée à travers chaque section.

b. Le conducteur est éloigné à une très grande distance du point P.

c. Pendant que le conducteur est retenu dans la nouvelle position (position II), on fait passer à travers chaque section une quantité d'électricité $-\varepsilon$.

d. Le circuit est ramené dans la position I.

Si les déplacements b et d n'ont été accompagnés d'aucun courant électrique, la coordonnée x aura repris la valeur initiale. Donc, si $\Delta_a x$, $\Delta_b x$, etc. sont les variations successives de cette coordonnée:

$$\Delta_a x + \Delta_b x + \Delta_c x + \Delta_d x = 0.$$

Or, comme la distance du circuit au conducteur est beaucoup plus grande dans la position II que dans la position I, la variation $\Delta_c x$ sera beaucoup plus petite en valeur absolue que la variation $\Delta_a x$; les déplacements $\Delta_b x$ et $\Delta_d x$ ne sauraient donc être 0.

C'est là, du reste, une chose très naturelle dans une théorie qui suppose que le conducteur ne peut se mouvoir sans pousser devant lui l'éther ambiant. Ce qu'il y a de remarquable dans le résultat obtenu, c'est que le déplacement du milieu qui est causé par un mouvement du conducteur doit être tel qu'il peut compenser le déplacement dû à un courant électrique.

§ 73. Si toutes les coordonnées des points mobiles du milieu sont des fonctions de p et de ε, on trouve pour les trois parties dans lesquelles l'énergie cinétique peut être décomposée:

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\dot{p}^2 \Sigma m \left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right],$$

$$T_2 = \dot{p}\, i\, \Sigma m \left[\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right],$$

$$T_3 = \tfrac{1}{2} i^2 \Sigma m \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)^2\right],$$

où on a mis i au lieu de $\dot{\varepsilon}$.

De ces trois expressions, la deuxième doit être 0. Voici deux hypothèses par chacune desquelles on peut satisfaire à cette condition.

a. Chaque point mobile du milieu se trouve toujours juxtaposé à un autre d'une masse égale. Les liaisons dans le système sont telles que ces deux points sont déplacés également et en directions opposées par un mouvement électrique, mais qu'ils se meuvent de la même manière si ce n'est que le circuit qui se déplace.

En distinguant par les indices 1 et 2 ce qui se rapporte à l'un ou à l'autre de deux points coïncidents, on a:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{\partial x_2}{\partial p},\quad \frac{\partial y_1}{\partial p} = \frac{\partial y_2}{\partial p},\quad \frac{\partial z_1}{\partial p} = \frac{\partial z_2}{\partial p},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial x_2}{\partial \varepsilon},\quad \frac{\partial y_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial y_2}{\partial \varepsilon},\quad \frac{\partial z_1}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial z_2}{\partial \varepsilon},$$

ce qui fait: $T_2 = 0$.

b. Dans les cas qu'on peut réaliser, les produits $\dot{p}\frac{\partial x}{\partial p}$, $\dot{p}\frac{\partial y}{\partial p}$, $\dot{p}\frac{\partial z}{\partial p}$ sont si petits par rapport aux quantités:

$$i\frac{\partial x}{\partial \varepsilon},\quad i\frac{\partial y}{\partial \varepsilon},\quad i\frac{\partial z}{\partial \varepsilon},$$

qu'ils peuvent être négligés.

Alors, bien que T_2 ne s'annule pas rigoureusement, il sera permis de négliger cette partie de l'énergie cinétique vis-à-vis de la dernière partie T_3.

A plus forte raison, on pourra négliger T_1. C'est un avantage de cette seconde hypothèse, que la première ne présente pas.

Il est facile de s'assurer que $\dot{p}\,\dfrac{\partial x}{\partial p}$ peut être beaucoup moindre que $\dot{i}\,\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}$. Prenons par exemple

$$x = \varphi\,\psi,$$

où φ est une fonction de p et ψ une fonction de ε. Alors on aura :

$$\frac{\dot{p}\,\dfrac{\partial x}{\partial p}}{\dot{i}\,\dfrac{\partial x}{\partial \varepsilon}} = \frac{\dot{p}}{\dot{i}}\,\frac{\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial p}}{\varphi}}{\dfrac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}}{\psi}}.$$

Or, la fonction

$$\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}}{\psi}$$

peut être rendue aussi considérable qu'on le désire ; on n'a qu'à admettre que la fonction ψ change très rapidement par un accroissement de ε.

Du reste, on pourrait essayer de remplacer l'hypothèse du paragraphe 57, par des suppositions analogues à celles que j'ai indiquées au paragraphe 69.

CHAPITRE IV.

Théorie d'un système de particules chargées qui se déplacent à travers l'éther sans entraîner ce milieu.

Considérations préliminaires.

§ 74. Il m'a semblé utile de développer une théorie des phénomènes électromagnétiques basée sur l'idée d'une matière pondérable parfaitement perméable à l'éther et pouvant se déplacer sans communiquer à ce dernier le moindre mouvement. Certains faits de l'optique peuvent être invoqués à l'appui de cette hypothèse et, bien que le doute soit encore permis, il importe certainement d'examiner toutes les conséquences de cette manière de voir. Malheureusement une difficulté bien sérieuse se présente dès le début. Comment, en effet, se faire une idée précise d'un corps qui, se déplaçant au sein de l'éther et traversé par conséquent par ce milieu, est en même temps le siège d'un courant électrique ou d'un phénomène diélectrique? Pour surmonter la difficulté, autant qu'il m'était possible, j'ai cherché à ramener tous les phénomènes à un seul, le plus simple de tous, et qui n'est autre chose que le mouvement d'un corps électrisé. On verra que, sans approfondir la relation entre la matière pondérable et l'éther, on peut établir un système d'équations propres à décrire ce qui se passe dans un système de tels corps. Ces équations se prêtent à des applications très variées qui feront l'objet des chapitres suivants; elles nous fourniront une déduction théorique du „coefficient d'entraînement" que *Fresnel* introduisit dans la théorie de l'aberration. Il suffira, dans ces applications, d'admettre que tous les corps pondérables contiennent une multitude de petites particules à charges positives ou négatives et que les phénomènes électriques sont produits par le déplacement de ces particules. Selon cette manière de voir, une

charge électrique est constituée par un excès de particules dont les charges ont un signe déterminé, un courant électrique est un véritable courant de ces corpuscules et dans les isolateurs pondérables il y aura „déplacement diélectrique" dès que les particules électrisées qu'il contient sont éloignées de leurs positions d'équilibre.

Ces hypothèses n'ont rien de nouveau en ce qui concerne les électrolytes et elles offrent même une certaine analogie avec les idées sur les conducteurs métalliques qui avaient cours dans l'ancienne théorie de l'électricité. Des atomes des fluides électriques aux corpuscules chargés la distance n'est pas grande.

On voit donc que, dans la nouvelle forme que je vais lui donner, la théorie de *Maxwell* se rapproche des anciennes idées. On peut même, après avoir établi les formules assez simples qui régissent les mouvements des particules chargées, faire abstraction du raisonnement qui y a conduit et regarder ces formules comme exprimant une loi fondamentale comparable à celles de *Weber* et de *Clausius*. Cependant, ces équations conservent toujours l'empreinte des principes de *Maxwell*. *Weber* et *Clausius* regardaient les forces qui s'exercent entre deux atomes d'électricité comme déterminées par la position relative, les vitesses et les accélérations que présentent ces atomes au moment pour lequel on veut considérer leur action. Les formules, au contraire, auxquelles nous parviendrons expriment d'une part quels changements d'état sont provoqués dans l'éther par la présence et le mouvement de corpuscules électrisés ; d'autre part, elles font connaître la force avec laquelle l'éther agit sur l'une quelconque de ces particules. Si cette force dépend du mouvement des autres particules, c'est que ce mouvement a modifié l'état de l'éther ; aussi la valeur de la force, à un certain moment, n'est-elle pas déterminée par les vitesses et les accélérations que les petits corps possèdent à ce même instant ; elle dérive plutôt des mouvements qui ont déjà eu lieu. En termes généraux, on peut dire que les

phénomènes excités dans l'éther par le mouvement d'une particule électrisée se propagent avec une vitesse égale à celle de la lumière. On revient donc à une idée que *Gauss* énonça déjà en 1845 et suivant laquelle les actions électrodynamiques demanderaient un certain temps pour se propager de la particule agissante à la particule qui en subit les effets.

Hypothèses fondamentales.

§ 75. *a.* Les particules chargées seront regardées comme étant de la „matière pondérable" à laquelle des forces peuvent être appliquées; cependant, je supposerai que dans tout l'espace occupé par une particule se trouve aussi l'éther, et même qu'un déplacement diélectrique et une force magnétique, produits par une cause extérieure, peuvent exister dans cet espace comme si la „matière pondérable" n'y existait pas. Cette dernière est donc considérée comme parfaitement perméable à ces actions.

b. Je désignerai par f, g et h les composantes du déplacement diélectrique dans l'éther, et je prendrai (§ 49) pour l'énergie potentielle du système la valeur

$$2\pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau,$$

V étant la vitesse de la lumière dans l'éther. Dans tous les points extérieurs aux particules on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

mais je suppose (§ 43) qu'à l'intérieur d'une particule cette équation doit être remplacée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

où ρ désigne quelque quantité propre au point considéré de la particule et à laquelle il nous est impossible de rien changer.

Cette quantité ρ sera appelée la *densité* de la charge électrique.

Pour simplifier les calculs, cette densité sera regardée comme une fonction continue des coordonnées; on supposera donc que la valeur de ϱ, 0 à l'extérieur d'une particule et positive ou négative à l'intérieur, ne présente pas une transition brusque à la surface. Cette dernière hypothèse nous donne le droit de regarder comme continues toutes les variables qui dépendent des coordonnées.

Du reste, x, y et z désigneront les coordonnées d'un point immobile dans l'espace. En général, toutes les quantités variables seront des fonctions de x, y, z et du temps t.

c. Les particules se comporteront comme des corps rigides; elles ne pourront donc avoir d'autre mouvement qu'une translation et une rotation. Dans ce mouvement, chaque point d'une particule conservera la même valeur de ϱ. Les valeurs de f, g et h dans l'éther, lui-même immobile, doivent changer de telle façon que ce soit chaque fois dans un nouveau point de l'espace qu'il est satisfait à l'équation (51).

d. Je désignerai par ξ, η et ζ les composantes de la vitesse d'un point d'une particule chargée, et je supposerai que le „courant électrique" — c'est-à-dire le vecteur qui donne lieu à une énergie cinétique de la grandeur à indiquer tantôt — a pour composantes:

$$u = \varrho\,\xi + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \varrho\,\eta + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \varrho\,\zeta + \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \; . \; (52)$$

A l'appui de cette hypothèse, que j'ai empruntée à M *Hertz*, on peut rappeler l'expérience bien connue de M. *Rowland*, dans laquelle la rotation rapide d'un disque chargé a produit les mêmes effets électromagnétiques qu'un système de courants circulaires. Elle a démontré que le déplacement d'un corps chargé constitue un vrai courant électrique, ce qui d'ailleurs est conforme à la théorie généralement acceptée de l'électrolyse.

Or, on mesure toujours les composantes d'un courant par les quantités d'électricité, rapportées à l'unité de surface et à l'unité de temps, qui traversent des éléments de surface per-

pendiculaires aux axes des coordonnées. Si donc l'unité de volume d'un corps chargé, animé de la vitesse (ξ, η, ζ), contient la quantité d'électricité ϱ, les composantes du courant seront $\varrho\,\xi$, $\varrho\,\eta$, $\varrho\,\zeta$.

D'un autre côté, on admet dans la théorie de *Maxwell* que les variations du déplacement diélectrique constituent un courant aux composantes $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t}$. Les équations (52) expriment donc que le vecteur dont dépend l'énergie cinétique est composé des deux courants dont nous venons de parler.

Ce „courant total" a la propriété importante que la distribution en est solénoïdale.

En effet, dans le mouvement d'un corps rigide on a:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (53)$$

et par conséquent:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

ou bien, en vertu de la formule (51),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}.$$

Ici le second membre représente la variation par unité de temps de la densité électrique dans un point qui se déplace avec la particule; l'expression s'annule donc en vertu de l'hypothèse *c*.

e. Grâce à la propriété que je viens de démontrer, on peut admettre que la relation entre le courant électrique (u, v, w) et l'énergie cinétique est toujours celle que nous avons appris à connaître dans le premier chapitre. Comme il s'agit des phénomènes dans l'éther il n'y a pas lieu de distinguer la force et l'induction magnétiques; je déterminerai donc la force magnétique (α, β, γ) par les équations:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}=4\pi\left(\varrho\,\xi+\frac{\partial f}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}=4\pi\left(\varrho\,\eta+\frac{\partial g}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}=4\pi\left(\varrho\,\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right),\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\ldots\;(54)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0\;\ldots\ldots\ldots\;(55)$$

et j'attribuerai à l'énergie cinétique la valeur:

$$T=\frac{1}{8\pi}\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,d\tau.$$

On obtient ces formules en posant $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$ dans celles des paragraphes 9 et 10; on fera les mêmes substitutions dans les équations (14) qui servent à définir les fonctions auxiliaires F, G et H.

f. Enfin, je supposerai que la position de chaque point qui prend part aux mouvements électromagnétiques est déterminée dès qu'on connaît la position de toutes les particules chargées du système et les valeurs de f, g et h dans tous les points de l'espace. C'est une hypothèse analogue à celle que j'ai discutée au chapitre précédent et présentant les mêmes difficultés.

Valeur de la variation $\delta' T$.

§ 76. Cette fois encore, j'aurai recours à la formule générale (3) pour trouver les équations du mouvement. Je commence par la variation $\delta' T$.

Désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque qui prend part aux mouvements électromagnétiques, et par x, y, z celles d'un point quelconque d'une particule chargée.

Un déplacement virtuel du système peut évidemment être défini au moyen des variations δx, δy, δz d'une part et des variations δf, δg, δh de l'autre, et les quantités $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ seront des fonctions linéaires et homogènes de toutes les va-

riations $\delta\,\mathrm{x}$, $\delta\,\mathrm{y}$, $\delta\,\mathrm{z}$, δf, δg, δh. Les coefficients de ces dernières quantités seront des constantes tant qu'il s'agit d'une position initiale déterminée.

En remplaçant, dans les fonctions dont il vient d'être question, $\delta\mathrm{x}$, $\delta\,\mathrm{y}$, $\delta\,\mathrm{z}$, δf, δg, δh par $\dot{\mathrm{x}}$, $\dot{\mathrm{y}}$, $\dot{\mathrm{z}}$ (ou ξ, η, ζ), $\dot{f}$, $\dot{g}$, $\dot{h}$, on aura les valeurs de $\dot{\mathrm{x}}'$, $\dot{\mathrm{y}}'$, $\dot{\mathrm{z}}'$ et, en y remplaçant de nouveau ξ, η, ζ, $\dot{f}$, $\dot{g}$, $\dot{h}$ par $\delta\,\xi$, $\delta\,\eta$, $\delta\,\zeta$, $\delta\dot{f}$, $\delta\dot{g}$, $\delta\dot{h}$, on trouvera les variations correspondantes des vitesses $\dot{\mathrm{x}}'$, $\dot{\mathrm{y}}'$, $\dot{\mathrm{z}}'$, la configuration étant toujours regardée comme constante. Il en résulte que si, sans rien changer à la configuration, on donne à ξ, η, ζ, $\dot{f}$, $\dot{g}$. $\dot{h}$ les accroissements $\delta\,\mathrm{x}$, $\delta\,\mathrm{y}$, $\delta\,\mathrm{z}$, δf, δg, δh, les vitesses de tous les points du système subiront précisément les variations dont il était question dans la définition de $\delta' T$.

Or, ces variations de ξ, η, ζ, $\dot{f}$, $\dot{g}$, $\dot{h}$ donnent lieu aux variations suivantes des composantes (52):

$$\varrho\,\delta\,\mathrm{x} + \delta f,\quad \varrho\,\delta\,\mathrm{y} + \delta g,\quad \varrho\,\delta\,\mathrm{z} + \delta h,$$

et on aura par conséquent (§ 12):

$$\delta' T = \int \left\{ F(\varrho\,\delta\mathrm{x} + \delta f) + G(\varrho\,\delta\mathrm{y} + \delta g) + H(\varrho\,\delta\mathrm{z} + \delta h) \right\} d\tau. \quad (56)$$

Équations qui déterminent l'état de l'éther.

§ 77. Considérons d'abord un déplacement virtuel auquel les particules chargées ne participent pas; l'équation (51) impose alors aux variations δf, δg, δh la condition

$$\frac{\partial\,\delta f}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta g}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta h}{\partial z} = 0.$$

En les supposant indépendantes du temps, ce qui est évidemment permis, on aura:

$$\frac{d\,\delta' T}{d t} = \int \left(\frac{\partial F}{\partial t}\,\delta f + \frac{\partial G}{\partial t}\,\delta g + \frac{\partial H}{\partial t}\,\delta h \right) d\tau.$$

Par un raisonnement tel qu'il a été employé aux paragraphes 19 et 58, on démontre

$$\delta T = 0.$$

Enfin, le travail δA, ou la diminution de l'énergie potentielle, est donné par la formule

$$\delta A = -4\pi V^2 \int (f\,\delta f + g\,\delta g + h\,\delta h)\, d\tau.$$

Il faut donc que, pour toutes les valeurs admissibles de δf, δg, δh, on ait:

$$-4\pi V^2 \int (f\,\delta f + g\,\delta g + h\,\delta h)\, d\tau =$$

$$= \int \left(\frac{\partial F}{\partial t}\delta f + \frac{\partial G}{\partial t}\delta g + \frac{\partial H}{\partial t}\delta h\right) d\tau.$$

Il en résulte (§ 25) que, pour toute ligne fermée immobile dans l'espace, dont un élément ds a les cosinus directeurs p, q, r,

$$-4\pi V^2 \int (pf + qg + rh)\, ds = \frac{d}{dt}\int (pF + qG + rH)\, ds,$$

et cette formule, appliquée à des cas particuliers, donne les équations suivantes:

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right), \text{ etc.}$$

ou bien, en vertu des formules (14):

$$\left.\begin{aligned} 4\pi V^2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ 4\pi V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \frac{\partial \beta}{\partial t}, \\ 4\pi V^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Si le mouvement des particules chargées est donné et si l'on connaît en outre les valeurs de f, g, h, α, β, γ pour le temps $t = 0$, ces formules, jointes aux équations (50), (51), (54) et (55), déterminent complètement l'état de l'éther.

Action de l'éther sur une particule chargée.

§ 78. Le système des forces avec lesquelles l'éther agit sur une particule chargée M se réduit à une force résultante et à un couple. Pour déterminer les composantes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ de la force, je ferai d'abord remarquer que, dans un état de mouvement donné, ces composantes ne sauraient dépendre de la masse de la matière pondérable qui constitue les particules chargées. Si cette masse était tout à fait insensible, $(-\mathfrak{X}, -\mathfrak{Y}, -\mathfrak{Z})$ représenterait la force extérieure qu'il faut appliquer à la particule pour produire le mouvement actuel. On déterminera donc $-\mathfrak{X}$, $-\mathfrak{Y}$, $-\mathfrak{Z}$ au moyen de la formule (3) en supposant que la valeur de T, donnée au paragraphe 75, représente l'énergie cinétique totale.

Pour trouver $-\mathfrak{X}$, il faut considérer un déplacement virtuel dans lequel la particule M seule éprouve une translation $\delta \mathrm{x}$ dans la direction de OX, les autres particules chargées ne changeant pas de place.

Pour que cette translation soit compatible avec la condition (51), il faut qu'elle soit accompagnée d'une variation de f, g et h. Cette variation peut être choisie d'une infinité de manières différentes, mais il est clair qu'après avoir obtenu les équations (57) on peut se borner à une seule entre toutes les suppositions admissibles. Je m'arrêterai à celle qui me semble la plus simple.

Dans tout l'espace extérieur à la particule M je poserai: $\delta f = \delta g = \delta h = 0$, mais à l'intérieur je prendrai:

$$\delta f = -\varrho\, \delta \mathrm{x}, \quad \delta g = 0, \quad \delta h = 0.$$

Si on admet ces valeurs, les deux membres de l'équation (51) subiront dans un point fixe de l'espace les mêmes variations et la condition sera encore remplie après le déplacement.

En effet, comme $\delta \mathrm{x}$ a pour tous les points de la particule la même valeur, on trouve pour l'accroissement du premier membre

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial x}\, \delta \mathrm{x},$$

ce qui est précisément la variation de la densité ϱ dans un point (x, y, z) de l'espace, si elle y prend la valeur qui existait d'abord au point $(x - \delta \mathrm{x}, y, z)$.

§ 79. Le premier membre de l'équation (3) prend maintenant la valeur

$$\delta A = -\mathbf{X}\,\delta \mathrm{x} + 4\pi\, V^2\, \delta \mathrm{x}.\int \varrho f\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à l'espace occupé par la particule M.

La formule (56) donne:

$$\delta' T = 0,$$

et on n'a donc plus qu'à calculer la variation δT.

Dans ce calcul, je supposerai que $\delta \mathrm{x}$ est indépendant du temps.

§ 80. Pour que le système exécute le mouvement varié, il suffit, d'après l'hypothèse f du paragraphe 75, qu'à partir de la configuration W_1' (§ 19), on donne aux particules chargées les positions et aux composantes f, g, et h les valeurs qu'elles ont dans la configuration W_2', tout ceci ayant lieu pendant un intervalle $d t$.

Voici, en quoi ce mouvement varié se distingue du mouvement réel:

a. Le mouvement des particules, à l'exception de la seule M, n'a subi aucun changement.

b. La vitesse d'un point quelconque de la particule M n'a changé ni en grandeur ni en direction, mais la ligne décrite par ce point dans le mouvement varié n'est pas la même que celle qu'il suivait dans le mouvement réel. On obtient la première ligne en donnant à la seconde une translation $\delta \mathrm{x}$.

Les premiers termes $\varrho \xi$, $\varrho \eta$ et $\varrho \zeta$ dans les expressions (52) n'ont donc plus pour un même point de l'espace les mêmes valeurs dans les deux mouvements. Leurs variations sont:

$$-\frac{\partial (\varrho \xi)}{\partial x}\delta \mathrm{x}, \quad -\frac{\partial (\varrho \eta)}{\partial x}\delta \mathrm{x}, \quad -\frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial x}\delta \mathrm{x} \; . \; . \; . \; . \; (58).$$

c. Comme les variations $W_1 \rightarrow W_1'$ et $W_2 \rightarrow W_2'$ n'affec-

tent pas les valeurs de g et de h, les dérivées $\dot{g}$ et $\dot{h}$ seront dans le mouvement varié ce qu'elles étaient dans le mouvement réel.

d. Le cas est différent pour $\dot{f}$. Si, en un point déterminé de l'espace, la première composante du déplacement diélectrique a la valeur f dans la position W_1, la valeur sera $f + \dot{f}\, dt$ dans la position W_2, $\dot{f}$ se rapportant au mouvement réel.

La valeur dans la configuration $W_1{}'$ sera (§ 78)

$$f - \varrho\, \delta \mathrm{x} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad (59)$$

et on obtiendra la valeur variée, pour le moment $t + dt$, en ajoutant à $f + \dot{f}\, dt$ ce que devient $-\varrho\, \delta \mathrm{x}$ à ce moment dans le point de l'espace considéré. Il est clair que ϱ y est devenu:

$$\varrho - \left(\xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) d\, t;$$

et la variation $\delta \mathrm{x}$ ne change pas avec le temps. On peut donc écrire pour la valeur de f dans la configuration $W_2{}'$:

$$f + \dot{f}\, d\, t - \varrho\, \delta \mathrm{x} + \left(\xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) \delta \mathrm{x}\, d\, t \quad . \; (60).$$

En divisant par $d\, t$ la différence des expressions (59) et (60) on trouve la valeur de $\dot{f}$ dans le mouvement varié. La variation de $\dot{f}$ devient

$$\left(\xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right) \delta \mathrm{x},$$

ce qui, joint aux expressions (58), donne:

$$\delta u = \left\{ - \frac{\partial (\varrho \xi)}{\partial x} + \left(\xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)\right\} \delta \mathrm{x},$$

$$\delta v = - \frac{\partial (\varrho \eta)}{\partial x} \delta \mathrm{x},$$

$$\delta w = - \frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial x} \delta \mathrm{x},$$

$$\delta T = \delta \mathrm{x} \int \left[F \left\{ - \frac{\partial (\varrho \xi)}{\partial x} + \left(\xi \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z}\right)\right\} - \right.$$
$$\left. - G \frac{\partial (\varrho \eta)}{\partial x} - H \frac{\partial (\varrho \zeta)}{\partial x} \right] d\, \tau.$$

Il est clair que c'est seulement dans l'espace occupé par la particule M qu'il y aura des variations de u, v et w; l'intégrale doit donc être étendue à cet espace.

L'équation peut être transformée au moyen d'une intégration partielle. En ayant égard aux formules (14) et (53) et à la circonstance que

$$\varrho = 0$$

à la surface de la particule, on arrive à la formule assez simple:

$$\delta T = \delta x \int \varrho (\eta \gamma - \zeta \beta) d\tau.$$

On n'a plus qu'à substituer cette valeur et celles de δA et $\delta' T$ (§ 79) dans l'équation (3). Voici les valeurs définitives des composantes de la force cherchée:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= 4\pi V^2 \int \varrho f d\tau + \int \varrho (\eta \gamma - \zeta \beta)\, d\tau, \\ \mathfrak{Y} &= 4\pi V^2 \int \varrho g d\tau + \int \varrho (\zeta \alpha - \xi \gamma)\, d\tau, \\ \mathfrak{Z} &= 4\pi V^2 \int \varrho h d\tau + \int \varrho (\xi \beta - \eta \alpha)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (61).$$

Moment du couple qui agit sur une particule chargée. [1])

§ 81. Je considérerai les particules comme de petites sphères dans lesquelles la densité électrique ϱ est une fonction de la distance r au centre et je choisirai ce dernier pour le point d'application de la force ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$). Quelles sont alors les composantes L, M, N du couple qui provient des actions exercées par l'éther? Pour les calculer, j'aurai recours à un artifice, analogue à celui qui nous a servi au paragraphe 78. Dans le cas où la masse de la particule M peut être négligée, $-L$, $-M$, $-N$ doivent être les composantes du couple qui dérive des forces extérieures, et si on prend pour le déplacement

[1]) On peut comprendre toutes les applications de la théorie sans avoir lu les paragraphes 81–89.

virtuel une rotation infiniment petite ω autour d'un axe passant par le centre et parallèle à OX, le travail de ces forces sera

$$-L\omega.$$

Comme la densité ϱ dans un point déterminé de l'espace n'est pas changée par la rotation, on peut supposer que le déplacement virtuel n'atteint pas les valeurs de f, g et h. On aura donc

$$\delta A = -L\omega,$$

et en considérant ω comme indépendant du temps on s'assure facilement que

$$\delta T = 0.$$

Reste à calculer $\delta' T$. Si x, y et z sont les coordonnées d'un point de la particule M, prises par rapport au centre, on aura

$$\delta \mathrm{x} = 0, \quad \delta \mathrm{y} = -\omega \mathrm{z}, \quad \delta \mathrm{z} = +\omega \mathrm{y},$$

et, par la formule (56),

$$\delta' T = \omega \int \varrho (H\mathrm{y} - G\mathrm{z})\, d\tau.$$

On finira par trouver pour les composantes du couple:

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{d}{dt}\int \varrho (G\mathrm{z} - H\mathrm{y})\, d\tau, \\ M &= \frac{d}{dt}\int \varrho (H\mathrm{x} - F\mathrm{z})\, d\tau, \\ N &= \frac{d}{dt}\int \varrho (F\mathrm{y} - G\mathrm{x})\, d\tau, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

où les intégrales doivent de nouveau être étendues à l'espace occupé par la particule considérée.

Vitesse de rotation d'une particule.

§ 82. Soient: m la masse d'une particule, l son rayon d'inertie par rapport à un axe passant par le centre, ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z les vitesses de rotation autour de trois axes qui sont parallèles

à OX, OY et OZ. Supposons que les forces extérieures ne donnent pas lieu à un couple. Alors on aura

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{1}{m\,l^2}\,\frac{d}{dt}\int \varrho\,(Gz - Hy)\,d\tau, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire:

$$\vartheta_x = \frac{1}{m\,l^2}\int \varrho\,(Gz - Hy)\,d\tau, \text{ etc. . . . . (63).}$$

Il n'est pas nécessaire d'ajouter des constantes, si on admet, comme cela est bien naturel, qu'antérieurement aux mouvements que nous étudions, le système a été à l'état de repos sans qu'il y eût des courants électriques. Alors, dans cet état initial, les quantités F, G, H, ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z ont toutes été 0.

§ 83. Pour transformer les intégrales, je désigne par r la distance du centre au point (x, y, z), par R le rayon de la particule, et je définis une fonction auxiliaire χ au moyen de la formule:

$$\chi = \int_r^R \varrho\, r\, dr.$$

En introduisant cette fonction, qui dépend de r seulement, on trouve:

$$\vartheta_x = \frac{1}{m\,l^2}\int \varrho\,(Gz - Hy)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{m\,l^2}\int\left(G\frac{\partial\chi}{\partial z} - H\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)d\tau,$$

ou bien, en intégrant par parties et en se rappelant que, pour $r = R$, $\chi = 0$:

$$\vartheta_x = \frac{1}{m\,l^2}\int \chi\left(\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)d\tau = -\frac{1}{m\,l^2}\int \chi\,\alpha\,d\tau.$$

Si, dans toute l'étendue de la particule, la densité ϱ a le même signe, il en sera de même de la fonction χ et on peut écrire, en représentant par $\bar{\alpha}$ une certaine valeur moyenne,

$$\vartheta_x = -\frac{\bar{\alpha}}{m\,l^2}\int \chi\,d\tau,$$

ou, après quelques transformations,

$$\vartheta_x = -\frac{4}{3}\pi \frac{\bar{\alpha}}{m\,l^2}\int_0^R \varrho\, r^4\, d\,r.$$

Si ϱ était la densité de la matière pondérable, la dernière intégrale aurait la valeur

$$\frac{3}{8\pi} m\,l^2.$$

Maintenant que ϱ représente la densité de la charge électrique, on aura d'une manière analogue

$$\int_0^R \varrho\, r^4\, d\,r = \frac{3}{8\pi}\, e\, l'^2,$$

si e est la charge totale et l' une longueur qui est déterminée par la distribution de la charge, tout comme l est déterminé par celle de la matière pondérable. On arrive ainsi aux formules

$$\vartheta_x = -\frac{\bar{\alpha}\, e\, l'^2}{2\, m\, l^2},\quad \vartheta_y = -\frac{\bar{\beta}\, e\, l'^2}{2\, m\, l^2},\quad \vartheta_z = -\frac{\bar{\gamma}\, e\, l'^2}{2\, m\, l^2} \quad ..(64).$$

Si la particule ne possédait aucune masse, ces équations exigeraient

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0,$$

c'est-à-dire que la particule tournerait alors si vite et dans une telle direction que la force magnétique moyenne à l'intérieur en deviendrait 0.

Cependant, je ne négligerai pas la masse; je lui attribuerai même une telle valeur que les rotations n'aient pas d'influence sensible.

Influence des rotations sur les valeurs des forces **X, Y** *et* **Z**.

§ 84. La vitesse (ξ, η, ζ), dont les composantes entrent dans les derniers termes des formules (61) peut être décomposée en deux parties, la première étant la vitesse (ξ_0, η_0, ζ_0) du centre, c'est-à-dire la vitesse de translation, et la seconde, que

je représenterai par (ξ_1, η_1, ζ_1) étant due à la rotation. Pareillement, on peut distinguer dans la force magnétique totale **H** ou (α, β, γ): 1°. la force magnétique $\mathbf{H}_0$ qui existerait si la particule considérée était en repos, 2°. celle $(\mathbf{H}_1)$ qui est due à la translation dont elle est animée, et 3°. celle $(\mathbf{H}_2)$ qui est causée par la rotation.

Ces divisions conduisent à regarder **X**, **Y** et **Z** comme composés de plusieurs parties, que nous allons considérer successivement.

§ 85. Si, d'abord, on se borne à la force magnétique $\mathbf{H}_0$, et si l'on suppose qu'elle a la même valeur et la même direction dans tous les points de la particule, ce qui est évidemment permis quand cette dernière est suffisamment petite, on est amené à des intégrales telles que

$$\int \varrho\, \eta\, \gamma_0\, d\tau = \gamma_0 \int \varrho\, (\eta_0 + \eta_1)\, d\tau, \text{ etc.}$$

Elles peuvent être remplacées par

$$\gamma_0 \int \varrho\, \eta_0\, d\tau, \text{ etc.}$$

les intégrales $\int \varrho\, \eta_1\, d\tau$, etc. s'évanouissant, parce que la distribution de la densité ϱ est symétrique autour du centre.

Tant qu'il s'agit de $\mathbf{H}_0$ seulement, on peut donc faire abstraction de la rotation; et si $\mathfrak{F}$ est la partie de la force (**X**, **Y**, **Z**) qui correspond à $\mathbf{H}_0$, on aura évidemment (§ 6, *k*):

$$\mathfrak{F} \,(=)\, \mathbf{H}_0\, e\, \mathrm{v}, \qquad (65)$$

v étant la vitesse de translation.

§ 86. A cette force $\mathfrak{F}$ il faut ajouter:

1° une force $\mathfrak{F}^{\mathrm{I}}$ qu'on obtient en combinant, de la manière qui est indiquée dans les formules (61), la force magnétique $\mathbf{H}_1$ et la vitesse v ou (ξ_0, η_0, ζ_0);

2° une force $\mathfrak{F}^{\mathrm{II}}$ qui résulte de la combinaison de $\mathbf{H}_1$ avec (ξ_1, η_1, ζ_1);

3° la force $\mathfrak{F}^{III}$ qui dépend en même temps de $\mathbf{H}_2$ et de (ξ_0, η_0, ζ_0);

4° la force $\mathfrak{F}^{IV}$ qui est déterminée par $\mathbf{H}_2$ et (ξ_1, η_1, ζ_1).

Cependant, nous n'aurons pas à nous occuper de $\mathfrak{F}^{I}$, parce que c'est l'effet d'une *rotation* que nous désirons connaître.

Pour simplifier encore davantage, je n'essayerai pas de déterminer rigoureusement $\mathfrak{F}^{II}$, $\mathfrak{F}^{III}$, $\mathfrak{F}^{IV}$; cela exigerait des calculs bien laborieux, parce que $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ dépendent, non seulement du mouvement actuel de la particule, mais aussi de sa translation et de sa rotation antérieures. Je prendrai pour $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$ les valeurs que ces forces magnétiques auraient si la particule était animée d'une translation ou d'une rotation constante; il semble qu'on peut ainsi obtenir une idée suffisante de l'ordre de grandeur des quantités cherchées.

Or, après avoir introduit cette simplification, on peut démontrer que, pour des raisons de symétrie qu'il semble superflu de spécifier, $\mathfrak{F}^{IV} = 0$. Il nous reste donc à évaluer $\mathfrak{F}^{II}$ et $\mathfrak{F}^{III}$.

§ 87. Considérons une particule qui est animée d'une vitesse de translation v, le centre décrivant une ligne droite, et construisons, à l'intérieur, un cercle de rayon r, dont l'axe coïncide avec cette ligne. Ce cercle indiquera la direction de $\mathbf{H}_1$ et sera, en même temps, le lieu géométrique des points où ce vecteur a une valeur déterminée. Or, en se rappelant la propriété fondamentale de la force magnétique (§ 9, 2) et en ayant égard à ce que le courant qui détermine $\mathbf{H}_1$ est du même ordre de grandeur que $\varrho\,\mathrm{v}$, ou que $\frac{3}{4}\frac{e\,\mathrm{v}}{\pi R^3}$, R étant le rayon de la particule, on trouve

$$2\pi r\,\mathbf{H}_1 \,(=)\, \pi r^2 . \frac{3}{4}\frac{e\,\mathrm{v}}{\pi R^3},$$

ou

$$\mathbf{H}_1 \,(=)\, \frac{e\,\mathrm{v}}{R^2}.$$

Lorsque, en second lieu, la particule tourne autour d'un diamètre avec une vitesse angulaire ϑ, elle peut être divisée en un système d'anneaux à sections infiniment petites, qui ont tous pour axe ce diamètre. Si l'un quelconque de ces anneaux a le rayon r et la section $d\sigma$, il y existera un courant dont l'intensité i, prise dans le sens ordinaire du mot, est du même ordre de grandeur que le produit $\varrho\,\vartheta\,r\,d\sigma$. Un tel courant annulaire produit, comme on sait, à son centre une force magnétique $\frac{2\pi i}{r}\,(=)\,2\pi\,\varrho\,\vartheta\,d\sigma$. La force magnétique qu'il fait naître au centre de la sphère est du même ordre; on trouve donc, en intégrant sur la demi-surface d'un grand cercle,

$$\mathbf{H}_2\,(=)\,2\pi\vartheta\int\varrho\,d\sigma\,(=)\,\frac{3}{4}\,\frac{\pi e\vartheta}{R},$$

ou bien

$$\mathbf{H}_2\,(=)\,\frac{e\vartheta}{R},$$

équation qu'on peut aussi appliquer aux autres points de la particule, précisément parce qu'il ne s'agit que de l'ordre de grandeur de $\mathbf{H}_2$.

§ 88. Si on porte dans les formules (61) les valeurs de $\mathbf{H}_1$ et $\mathbf{H}_2$, en ayant égard à ce que la vitesse (ξ_1, η_1, ζ_1) est de l'ordre ϑR, on trouve:

$$\mathfrak{F}^{\text{II}}\,(=)\,\mathfrak{F}^{\text{III}}\,(=)\,\frac{e^2\,\mathrm{v}\,\vartheta}{R},$$

où l'on peut substituer la valeur de ϑ qui est donnée par les équations (64). Or, dans ces dernières, l' et l sont des longueurs du même ordre, et la force magnétique $(\bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma)$ sera plus petite que la force magnétique $\mathbf{H}_0$, parce que la rotation de la particule tend à diminuer la force magnétique à l'intérieur (§ 83). On exagérera donc les forces $\mathfrak{F}^{\text{II}}$ et $\mathfrak{F}^{\text{III}}$ si on écrit

$$\vartheta\,(=)\,\frac{\mathbf{H}_0\,e}{m}$$

et

$$\mathfrak{F}^{II} (=) \mathfrak{F}^{III} (=) \frac{\mathbf{H}_0 \, e^3 \, \mathrm{v}}{m R} .$$

La comparaison de ce résultat avec la valeur (65) donne:

$$\frac{\mathfrak{F}^{II}}{\mathfrak{F}} (=) \frac{\mathfrak{F}^{III}}{\mathfrak{F}} (=) \frac{e^2}{m R} .$$

Il en résulte qu'on pourra négliger $\mathfrak{F}^{II}$ et $\mathfrak{F}^{III}$, en d'autres termes, qu'on pourra faire abstraction de la rotation, si

$$\frac{e^2}{m R}$$

est une fraction très petite.

§ 89. Soit $\mathfrak{a}$ la densité de la matière pondérable qui constitue une particule; alors on aura:

$$\frac{e^2}{m R} = \frac{e^2}{m^2} \frac{m}{R} (=) \frac{e^2}{m^2} \mathfrak{a} R^2 .$$

Si la particule chargée était un atome d'une des parties composantes d'un électrolyte, $\frac{m}{e}$ ne serait autre chose que l'équivalent électrochimique de cette composante, exprimé en unités électromagnétiques. En choisissant comme unités fondamentales le centimètre, le gramme et la seconde, on a pour l'hydrogène:

$$\frac{m}{e} = 10^{-4}$$

et pour tous les autres corps une valeur plus grande.

Supposons que $\mathfrak{a}$ ne surpasse pas le nombre 100; pour que $\frac{e^2}{m R}$ ou $\frac{e^2}{m^2} \mathfrak{a} R^2$ soit une petite fraction, il suffira alors que R soit beaucoup plus petit que $\frac{m}{e \sqrt{\mathfrak{a}}} = 0{,}00001$ centimètre. C'est ce que tout le monde admettra.

Quant aux particules chargées qui se trouvent dans les métaux et dans les corps non-conducteurs, je me bornerai à

remarquer que, pour des valeurs déterminées de $\frac{e}{m}$ et de $\mathfrak{a}$, on pourra rendre l'expression

$$\frac{e^2}{m^2}\,\mathfrak{a}\,R^2$$

aussi petite que l'on voudra, par une supposition convenable sur la longueur de R.

Récapitulation des formules les plus importantes.

§ 90. Je suis bien éloigné de vouloir attacher trop d'importance aux considérations précédentes. Elles n'avaient d'autre but que de rendre plus acceptable l'hypothèse que voici, dont je me servirai dans tout ce qui suit:

Les particules chargées dont le déplacement donne lieu aux phénomènes électriques ne peuvent pas tourner autour de leur centre et, pour en déterminer le mouvement de translation, il suffit d'employer les équations (61), qui peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= 4\pi V^2\int\varrho f\,d\tau + \eta\int\varrho\gamma\,d\tau - \zeta\int\varrho\beta\,d\tau,\\ \mathfrak{Y} &= 4\pi V^2\int\varrho g\,d\tau + \zeta\int\varrho\alpha\,d\tau - \xi\int\varrho\gamma\,d\tau,\\ \mathfrak{Z} &= 4\pi V^2\int\varrho h\,d\tau + \xi\int\varrho\beta\,d\tau - \eta\int\varrho\alpha\,d\tau.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (\mathrm{I})$$

A ces formules il faut joindre les équations qui déterminent l'état de l'éther et qu'il sera utile de récapituler ici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\varrho, \quad\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{II})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0, \quad\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{III})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}&=4\pi\left(\varrho\xi+\frac{\partial f}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}&=4\pi\left(\varrho\eta+\frac{\partial g}{\partial t}\right),\\ \frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}&=4\pi\left(\varrho\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}\right).\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (IV)$$

$$\left.\begin{aligned}4\pi V^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)&=\frac{\partial\alpha}{\partial t},\\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)&=\frac{\partial\beta}{\partial t},\\ 4\pi V^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)&=\frac{\partial\gamma}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (V)$$

§ 91. Dans le chemin qui nous a conduit à ces équations nous avons rencontré plus d'une difficulté sérieuse, et on sera probablement peu satisfait d'une théorie qui, loin de dévoiler le mécanisme des phénomènes, nous laisse tout au plus l'espoir de le découvrir un jour. Les physiciens qui éprouvent ce sentiment peuvent toutefois admettre l'idée fondamentale qui a été la base des recherches de *Faraday* et de *Maxwell*, et ils peuvent considérer les formules (I) — (V) comme des équations hypothétiques assez simples qui pourraient servir à la description des phénomènes. J'ose même dire que si l'on n'avait en vue autre chose que cette description, sans vouloir tenter une explication mécanique, il se pourrait que le choix tombât précisément sur ces équations que nous avons appris à connaître. Dès qu'on a renoncé à l'idée d'une action des corps où le milieu interposé n'intervient pas, il faudra décrire ce qui se passe dans un système de particules chargées à l'aide de deux systèmes d'équations, relatives, les unes à l'état de l'éther et les autres à la réaction de ce milieu sur les particules.

Tant que, dans le champ que l'on considère, il ne se trouve aucun corps chargé, les formules données par M. *Hertz* dans son premier mémoire sont bien les plus simples qu'on puisse

admettre pour exprimer l'état de l'éther, et si l'on veut établir un système d'équations pouvant servir à l'étude d'un système de particules chargées, il est naturel de se borner à des modifications dont on reconnaît immédiatement la nécessité. Or, on obtient les formules (II) — (V) en remplaçant dans celles de M. *Hertz* l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0$$

par

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\varrho$$

et en substituant (§ 75, *d*) dans les équations:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}=4\pi u, \text{ etc.}$$

$$u=\varrho\xi+\frac{\partial f}{\partial t}, \quad v=\varrho\eta+\frac{\partial g}{\partial t}, \quad w=\varrho\zeta+\frac{\partial h}{\partial t}.$$

Dans le chapitre suivant on verra que les équations (I) s'obtiennent également par des considérations bien simples.

Si, du reste, ces équations sont établies à titre d'hypothèses, on y peut ajouter la supposition que les particules chargées ne sont jamais sujettes à un mouvement rotatoire.

§ 92. Le physicien qui voudrait admettre les équations (I) — (V) sans les déduire des principes de la mécanique, serait obligé de justifier son choix en démontrant que ces équations sont compatibles avec la loi de la conservation de l'énergie. Voici comment on le vérifie.

Soient: m la masse d'une particule chargée, X', Y', Z' les composantes de la force extérieure à laquelle elle est soumise. Alors

$$X+X'=m\dot{\xi}, \quad Y+Y'=m\dot{\eta}, \quad Z+Z'=m\dot{\zeta} \quad ..(66).$$

Il faut que le travail des forces extérieures par unité de temps, c'est à dire l'expression

$$A=\Sigma(X'\xi+Y'\eta+Z'\zeta),$$

soit égal à $\frac{dU}{dt}$, U étant une fonction qui est déterminée par l'état du système. Or, en employant les formules (I) et (66), on trouve d'abord

$$A = \frac{d}{dt} \Sigma \tfrac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 4\pi V^2 \Sigma \left[\xi \int \varrho f \, d\tau + \right.$$

$$\left. + \eta \int \varrho g \, d\tau + \zeta \int \varrho h \, d\tau \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \Sigma \tfrac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - 4\pi V^2 \int \varrho (\xi f + \eta g + \zeta h) \, d\tau.$$

Dans la dernière intégrale, qui doit être étendue à l'espace infini, on peut substituer les valeurs de $\varrho\,\xi$, $\varrho\,\eta$, $\varrho\,\zeta$ qu'on tire des équations (IV); ensuite, on peut intégrer par parties et employer les équations (V). En fin de compte:

$$A = \frac{dU}{dt},$$

si on pose:

$$U = \Sigma \tfrac{1}{2} m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2\pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2) \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, d\tau.$$

C'est la valeur de l'énergie du système. Le premier terme n'est autre chose que l'énergie cinétique que les particules possèdent en vertu de leurs masses. Les deux autres termes ont la forme que nous connaissons déjà. Seulement, du point de vue où nous nous sommes placés maintenant, il n'est pas nécessaire de regarder comme potentielle l'énergie

$$2\pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2) \, d\tau$$

et comme cinétique l'énergie

$$\frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \, d\tau.$$

CHAPITRE V.

Applications de la théorie précédente.

Electrostatique.

§ 93. Supposons que toutes les particules chargées se trouvent en repos et que dans l'éther il n'y ait aucun courant de déplacement. Alors les formules (III) et (IV) donnent

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

et les formules (V) deviennent:

$$\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

Il faut donc que f, g et h soient les dérivées partielles d'une même fonction. En désignant celle-ci par

$$-\frac{\Omega}{4\pi V},$$

on aura en vertu de la relation (II)

$$\Delta \Omega = -4\pi V \varrho.$$

Après avoir déterminé Ω à l'aide de cette formule, on trouve

$$X = -V\int \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial x} d\tau,\ Y = -V\int \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial y} d\tau,\ Z = -V\int \varrho \frac{\partial \Omega}{\partial z} d\tau.$$

Ce sont les équations dont se servirait l'ancienne électrostatique pour calculer la force qui agit sur une particule chargée; seulement, dans cette théorie, les formules reposeraient sur l'hypothèse que deux quantités dq et dq' d'électricité, situées à une distance r l'une de l'autre, se repoussent avec une force:

$$V^2 \frac{dq\, dq'}{r^2}.$$

Évidemment, le facteur V doit être le rapport entre les unités électromagnétique et électrostatique de l'électricité. On sait, en effet, que ce rapport est exprimé par le même nombre que la vitesse de la lumière dans l'éther.

§ 94. D'après ce qui précède, notre théorie exige que deux particules immobiles aux charges e et e', dont les dimensions sont beaucoup plus petites que la distance r, se repoussent avec une force

$$V^2 \frac{e\, e'}{r^2},$$

un signe négatif de cette expression indiquant une attraction.

Si donc on admet que les corps pondérables contiennent une multitude de petites particules chargées, que dans les conducteurs ces particules peuvent se mouvoir librement et qu'une charge électrique est constituée par un excès de particules positives ou négatives, on peut donner à la théorie de l'équilibre électrique une telle forme qu'elle ne se distingue guère de la théorie ancienne. Seulement, on ne parlera pas de particules d'électricité, mais de particules chargées, et on se souviendra toujours que les forces mutuelles sont causées par une modification dans l'état de l'éther.

Dans cette électrostatique ramenée à la forme ancienne, on définira le potentiel par la formule:

$$\varphi = V \Sigma \frac{e}{r},$$

et on aura pour les composantes de la force qui agit sur une des particules:

$$-V e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -V e \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -V e \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Remarquons que ce potentiel est intimement lié à la fonction Ω que j'ai introduite dans le paragraphe précédent. Cette fonction peut évidemment être décomposée en un grand nombre de parties dont chacune est due à une seule des particules chargées. Si, dans le calcul de Ω, on exclut la partie qui dépend de la particule pour laquelle on veut calculer la force, la fonction devient identique à φ.

Force électrodynamique agissant sur un élément d'un circuit linéaire.

§ 95. Dans l'étude des courants électriques qu'on peut observer par les moyens ordinaires, il ne faut pas perdre de vue que la plus petite partie d'un conducteur sur laquelle on puisse opérer contient toujours une multitude énorme de particules chargées; on peut même concevoir une partie de l'espace qui satisfait à cette dernière condition et qui peut néanmoins être regardée comme infiniment petite dans une théorie ayant pour objet, non pas le mouvement des particules individuelles, mais les effets d'ensemble qui sont accessibles à nos sens. Un tel élément de volume sera représenté par $D\tau$, pour le distinguer d'un élément $d\tau$ qui est infiniment petit dans le sens mathématique et peut par conséquent trouver place même à l'intérieur d'une seule particule.

Or, il est clair qu'en suivant une ligne droite de petite longueur, tirée dans un conducteur, on rencontrera en succession rapide des valeurs très différentes des fonctions f, g, h, u, v, w, α, β, γ, la droite se trouvant tantôt dans le voisinage immédiat ou même à l'intérieur d'une particule chargée et tantôt à une distance plus grande. Cependant, ces variations rapides n'ont aucune influence sur les phénomènes considérés; ce qu'on peut observer dépend uniquement des valeurs moyennes, qu'on peut définir de la manière suivante:

Si l'on conçoit un élément sphérique $D\tau$ ayant pour centre un point quelconque P, et qu'on prenne la valeur moyenne $\bar{\psi}$ qu'une fonction ψ présente à l'intérieur de $D\tau$, cette valeur $\bar{\psi}$ sera nommée la *valeur moyenne au point P*.

Evidemment, on aura

$$\bar{\psi} = \frac{1}{D\tau} \int \psi \, d\tau,$$

l'intégration s'étendant à la sphère $D\tau$. Le résultat sera une

fonction de t et des coordonnées x, y, z du point P, et on démontre facilement les relations suivantes:

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \overline{\frac{\partial \psi}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}.$$

Il en résulte que les équations

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4 \pi u, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 4 \pi v, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4 \pi w \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (67)$$

auront toujours lieu, si l'on entend par α, β, γ, u, v et w les valeurs moyennes.

Il est clair du reste que

$$\bar{\psi} = \psi$$

si la fonction ψ ne présente pas de variations rapides à l'intérieur de l'élément $D\tau$.

§ 96. La valeur moyenne de u (§ 75, d) est:

$$\bar{u} = \frac{1}{D\tau} \int \varrho \xi \, d\tau + \frac{1}{D\tau} \frac{\partial}{\partial t} \int f \, d\tau.$$

Si le mouvement des particules chargées est stationnaire, $\int f \, d\tau$ ne change pas avec le temps et le dernier terme s'annule. D'un autre côté, l'intégrale

$$\int \varrho \xi \, d\tau$$

peut être remplacée par

$$\Sigma e \xi,$$

e étant la charge d'une particule, et la somme étant étendue à toutes les particules de l'élément $D\tau$.

On trouve donc:

$$\bar{u} = \frac{\Sigma e \xi}{D\tau}, \quad \bar{v} = \frac{\Sigma e \eta}{D\tau}, \quad \bar{w} = \frac{\Sigma e \zeta}{D\tau} \quad \ldots\ldots (68).$$

Ces expressions peuvent être interprétées de différentes manières. D'abord, on peut écrire: $\Sigma e \xi = E_1 \xi_1 + E_2 \xi_2$, etc., en représentant par E_1 la somme de toutes les charges positives, par E_2 celle des charges négatives et par ξ_1 et ξ_2 les vitesses moyennes des particules positives et négatives. En second lieu, on peut considérer un élément de surface perpendiculaire à OX, et comparable quant aux dimensions à $D\tau$. La composante $\bar{u}$ sera égale à la somme des charges que possèdent les particules qui traversent cet élément, cette somme étant rapportée à l'unité de surface et à l'unité de temps.

En prenant pour u, v, w les valeurs (68) on déterminera par les formules (67) la force magnétique produite par un courant stationnaire.

§ 97. Concevons un champ magnétique quelconque et dans ce champ un circuit linéaire fermé s. Tant que les particules chargées contenues dans ce conducteur se trouvent en repos, les composantes α, β, γ auront partout les valeurs qui correspondent au champ magnétique donné; d'ailleurs, si ces valeurs sont constantes, on peut supposer $f = g = h = 0$.

Si maintenant on établit dans le circuit un courant électrique i, l'état de l'éther et les valeurs de α, β, γ en seront changés, mais on peut faire abstraction de ce changement dans le calcul suivant, qui doit faire connaître la force agissant sur un élément de la longueur Ds [1]), en tant qu'elle dépend de l'état de l'éther qui existait déjà.

Remarquons que la force électrodynamique cherchée $\mathbf{E}$ est la résultante des forces que toutes les particules chargées de l'élément éprouvent de la part de l'éther. Le champ magnétique pouvant être considéré comme homogène dans l'étendue de Ds, les équations (I) (§ 90) donnent:

$$\mathbf{E}_x = \gamma \Sigma \eta e - \beta \Sigma \zeta e,$$
$$\mathbf{E}_y = \alpha \Sigma \zeta e - \gamma \Sigma \xi e,$$
$$\mathbf{E}_z = \beta \Sigma \xi e - \alpha \Sigma \eta e.$$

[1]) La lettre D indique ici la même chose que lorsqu'il s'agissait d'un élément de volume $D\tau$.

Les sommes doivent être étendues à toutes les particules qui se trouvent à l'intérieur de l'élément. Je représente par ω la section du conducteur, par $\mathbf{C} = \frac{i}{\omega}$ le courant, par l, m et n les cosinus directeurs de $D\,s$.

Alors, des équations (68) on déduit:

$$\Sigma\, e\,\xi = \bar{u}\,\omega\, D\,s = l\,\mathbf{C}\,\omega\, D\,s = l\,i\,D\,s,$$

$$\Sigma\, e\,\eta = m\,i\,D\,s, \quad \Sigma\, e\,\zeta = n\,i\,D\,s;$$

donc:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_x &= i\,(m\,\gamma - n\,\beta)\,D\,s, \\ \mathbf{E}_y &= i\,(n\,\alpha - l\,\gamma)\,D\,s, \\ \mathbf{E}_z &= i\,(l\,\beta - m\,\alpha)\,D\,s. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Ce sont des formules bien connues, qui s'accordent avec les expériences.

Remarques sur les formules (I).

§ 98. Si, au point de vue où nous nous sommes placés au paragraphe 91, on veut faire une hypothèse convenable sur la force qu'une particule chargée e éprouve de la part de l'éther, il est tout d'abord probable que cette force se composera de deux parties, dont l'une sera en jeu dans les cas de l'électrostatique, tandis que l'autre provient du mouvement de la particule. Les deux parties doivent dépendre de l'état de l'éther au point où se trouve la particule; la première partie sera donc déterminée par le déplacement diélectrique. Or, lorsque toutes les particules chargées se trouvent en repos, les composantes de ce déplacement, en tant qu'il est produit par toutes les particules, à l'exception de e, sont (§ § 93 et 94)

$$f = -\frac{1}{4\pi V}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi V}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi V}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

et l'expérience démontre que la force a pour composantes:

$$-V e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -V e \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -V e \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$4 \pi V^2 e f, \quad 4 \pi V^2 e g, \quad 4 \pi V^2 e h.$$

Il est donc naturel d'admettre que dans tous les cas la première partie de la force peut être représentée par

$$4 \pi V^2 \int \varrho f d \tau, \quad 4 \pi V^2 \int \varrho g d \tau, \quad 4 \pi V^2 \int \varrho h d \tau.$$

Quant aux composantes de la seconde partie, elles doivent donner lieu à la force déterminée par les formules (69); la plus simple supposition qu'on puisse faire à leur égard est exprimée dans les derniers termes des équations (I).

Les deux parties de la force pourraient être distinguées par les noms de *force électrostatique* et de *force électrodynamique.* Il importe cependant de faire ressortir que la première partie dépend, elle aussi, du mouvement des particules dont on considère l'action.

Induction dans un circuit fermé.

§ 99. Nous allons appliquer les formules fondamentales à l'induction qui est produite dans un circuit, soit par un mouvement dont il est animé lui-même, soit par un changement du champ magnétique où il se trouve. L'état de l'éther, variable dans ce dernier cas, sera regardé comme donné, et nous ne nous occuperons pas de la modification qu'y apporte le courant induit.

Calculons la force $p e$ qui agit, dans la direction du circuit s, sur une particule e. En nommant ξ_1, η_1, ζ_1 les composantes de la vitesse du point du circuit où se trouve la particule, v la vitesse relative de cette dernière par rapport au conducteur, l, m, n les cosinus directeurs de $d s$, on aura:

$$\xi = \xi_1 + \mathrm{v}\, l, \quad \eta = \eta_1 + \mathrm{v}\, m, \quad \zeta = \zeta_1 + \mathrm{v}\, n$$

7*

et, d'après les formules (I):

$$p\,e = \mathbf{X}\,l + \mathbf{Y}\,m + \mathbf{Z}\,n = 4\,\pi\,V^2\,e\,(f\,l + g\,m + h\,n) +$$

$$+ e \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix}.$$

En divisant par e, on obtient la force p rapportée à l'unité de charge; ce qu'on appelle la force électromotrice induite dans le circuit est ensuite donné par

$$\mathrm{P} = \int p\,d\,s.$$

§ 100. Soit σ une surface fixe sur laquelle le circuit est situé dans les positions qu'il occupe aux moments t et $t + d\,t$, et considérons l'intégrale

$$\int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma$$

étendue à la partie de cette surface qu'il embrasse. Pendant le temps $d\,t$, cette intégrale subit un accroissement $d\int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma$, qui peut être décomposé en deux parties. La première partie, $d_1 \int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma$, n'est autre chose que $\int d\,\mathbf{H}_n\,d\,\sigma$; c'est l'accroissement que l'intégrale éprouverait si le circuit ne se déplaçait pas. La seconde partie, $d_2 \int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma$, provient du changement de l'étendue de la surface. En désignant par $d\,\sigma'$ les éléments nouveaux qui sont admis à l'intérieur du circuit et par $d\,\sigma''$ les éléments qui en sont exclus, on aura:

$$d_2 \int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma = \Sigma\,\mathbf{H}_n\,d\,\sigma' - \Sigma\,\mathbf{H}_n\,d\,\sigma''.$$

Ceci posé, on peut déduire des équations (V):

$$4\,\pi\,V^2 \int (f\,l + g\,m + h\,n)\,d\,s = -\frac{d_1 \int \mathbf{H}_n\,d\,\sigma}{d\,t}.$$

D'un autre côté, la valeur absolue du produit

$$\begin{vmatrix} l, & m, & n \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} ds\,dt$$

représente le volume du parallélépipède ayant pour base l'élément $d\sigma'$ ou $d\sigma''$ qui est décrit par ds et pour arête le vecteur $\mathbf{H}$; elle sera donc égale à la valeur absolue de $\mathbf{H}_n\, d\sigma'$ ou $\mathbf{H}_n\, d\sigma''$. En ayant égard aux signes algébriques, on trouvera :

$$\mathrm{P} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{H}_n\, d\sigma,$$

équation bien connue de la théorie de l'induction.

Pouvoir inducteur spécifique.

§ 101. L'influence des diélectriques pondérables dans les phénomènes de l'électrostatique s'explique par la supposition que les molécules de ces corps contiennent des particules chargées qui peuvent être déplacées par des forces extérieures. Pour simplifier, j'admettrai les hypothèses suivantes, qu'on pourrait cependant remplacer par d'autres plus générales :

a Si toutes les particules chargées d'une molécule se trouvent dans leurs positions naturelles, elle n'exerce aucune influence sur d'autres molécules, même sur celles qui sont les plus voisines.

b. Il n'y a dans chaque molécule qu'une seule particule chargée qui puisse être déplacée de sa position d'équilibre P. Si cette particule a la charge e, il faut, d'après l'hypothèse a, que l'ensemble des autres particules exerce la même action électrostatique qu'une charge $-e$ au point P. Si donc la particule mobile a pris la position P', la molécule entière équivaut à un système formé de deux particules aux charges $+e$ et $-e$, l'une se trouvant au point P' et l'autre au point P. Un tel système sera nommé un *couple électrique*; le produit

$$\mathbf{m} = e \times PP'$$

est ce qu'on nomme le *moment* de ce couple. Cette quantité est regardée comme un vecteur dont la direction est celle de la ligne $P P'$.

Les composantes du moment sont

$$\mathfrak{m}_x = e\,\mathrm{x}, \quad \mathfrak{m}_y = e\,\mathrm{y}, \quad \mathfrak{m}_z = e\,\mathrm{z},$$

x, y, z étant les projections du déplacement $P P'$.

c. Ces dernières lignes seront considérées comme très petites, même par rapport à la distance des molécules les plus voisines.

d. Dès que le corpuscule mobile a été déplacé, les autres parties de la molécule exercent une force qui tend à le ramener vers la position d'équilibre. Je prendrai pour les composantes de cette force:

$$-\mathfrak{f}\,\mathrm{x}, \quad -\mathfrak{f}\,\mathrm{y}, \quad -\mathfrak{f}\,\mathrm{z},$$

$\mathfrak{f}$ étant une constante qui dépend de la structure de la molécule. Du reste, ce coefficient et la charge e seront regardés comme ayant les mêmes valeurs dans toutes les molécules d'un même isolateur homogène.

Si $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ est la force que toutes les particules chargées qui se trouvent au dehors de la molécule considérée exercent sur une particule à unité de charge placée au point P, la particule mobile sera en équilibre si

$$\mathrm{x} = \frac{e\,\mathfrak{X}}{\mathfrak{f}}, \quad \mathrm{y} = \frac{e\,\mathfrak{Y}}{\mathfrak{f}}, \quad \mathrm{z} = \frac{e\,\mathfrak{Z}}{\mathfrak{f}},$$

et on aura

$$\mathfrak{m}_x = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{m}_y = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{m}_z = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{Z} \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

§ 102. Voici le problème qu'il faut résoudre pour se rendre compte de l'influence d'un diélectrique homogène et isotrope dans les phénomènes électrostatiques.

Un système de conducteurs est placé dans un diélectrique qui s'étend à l'infini, et chaque conducteur est maintenu à un potentiel donné. Déterminer les charges.

Remarquons d'abord que le potentiel φ en un point quelconque d'un conducteur, c'est-à-dire la somme

$$\varphi = V \Sigma \frac{e}{r},$$

peut être décomposé en deux parties φ_1 et φ_2, l'une étant produite par les particules chargées qui se trouvent sur les conducteurs eux-mêmes, et l'autre par la „polarisation" des molécules du diélectrique. Je commencerai par calculer la valeur de φ_2 dans un point Q extérieur au diélectrique, et, pour m'exprimer avec plus de clarté, je désignerai par $D s$, $D \sigma$, $D \tau$ des éléments dont les dimensions sont très grandes par rapport aux distances moléculaires

Soient x, y, z les coordonnées d'un point dans le diélectrique, x', y', z' les coordonnées du point Q, r la distance de ces deux points, N le nombre des molécules par unité de volume, $\overline{\mathbf{m}}_x$, $\overline{\mathbf{m}}_y$, $\overline{\mathbf{m}}_z$ les valeurs moyennes (§ 95) de $\mathbf{m}_x$, $\mathbf{m}_y$, $\mathbf{m}_z$ au point (x, y, z), $N \overline{\mathbf{m}}_x = \mathbf{M}_x$, $N \overline{\mathbf{m}}_y = \mathbf{M}_y$, $N \overline{\mathbf{m}}_z = \mathbf{M}_z$.

Le vecteur $\mathbf{M}$ est alors ce qu'on peut appeler le moment électrique rapporté à l'unité de volume.

Un calcul très simple donne pour la partie de φ_2 qui est due à une seule molécule

$$V \left\{ \mathbf{m}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{m}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{m}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\},$$

et pour celle qui provient d'un élément $D \tau$

$$V \left\{ \mathbf{M}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} D \tau.$$

La valeur cherchée sera donc

$$\varphi_2 = V \int \left\{ \mathbf{M}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{M}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} D \tau,$$

et, en intégrant par parties, on arrive à l'expression suivante:

$$\varphi_2 = - V \int \frac{\mathbf{M}_n}{r} D \sigma - V \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z} \right) D \tau.$$

Dans ce calcul, on s'est borné au cas où la plus petite valeur de r est encore très grande par rapport aux distances

moléculaires. Cela n'empêche pas que cette valeur ne puisse être très petite par rapport aux dimensions des conducteurs; la formule peut donc être appliquée à des points Q qui se trouvent dans le voisinage immédiat de la surface.

La première intégrale doit être étendue aux surfaces qui limitent le diélectrique, la normale n étant dirigée vers l'intérieur de ce corps.

Du reste, la formule peut être interprétée ainsi:

En ce qui regarde les actions exercées sur des points extérieurs, le diélectrique peut être remplacé par un système ordinaire de particules chargées, distribuées d'une part sur l'espace τ occupé par l'isolateur, d'autre part sur les surfaces σ qui le limitent, les densités de ces distributions étant:

$$-\left(\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}\right) \text{ et } -\mathbf{M}_n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

§ 103. Soit φ le potentiel total qui serait produit en un point quelconque par la distribution dont il vient d'être question et par les particules chargées qui se trouvent sur les conducteurs. Cette fonction coïncidera avec le potentiel réel des conducteurs, et on verra bientôt qu'elle peut être employée dans la discussion de ce qui se passe à l'intérieur du diélectrique.

Si les distributions de particules chargées déterminées par les expressions (71) existaient réellement, une particule à l'unité de charge éprouverait une force aux composantes:

$$-V\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -V\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -V\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Pour qu'il y ait équilibre, il faut qu'à l'intérieur d'un conducteur

$$\varphi = \text{const.},$$

d'où on déduit que les particules électrisées qui constituent la charge d'un conducteur formeront une couche très mince à la surface. Je désignerai par

$$S\, D\, \sigma$$

la charge totale de la partie de cette couche qui correspond à l'élément $D\sigma$. Comme, dans le calcul du potentiel φ, il y a à considérer deux couches très-minces juxtaposées, qui par unité de surface présentent les charges S et $-\mathbf{M}_n$, il résulte d'un théorème bien connu que, en un point qui est séparé du conducteur par la seconde couche mais en est néanmoins très voisin,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4\pi V(S - \mathbf{M}_n) \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

A cette condition on peut ajouter l'équation:

$$\Delta \varphi = 4\pi V\left(\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}\right), \ldots\ldots \quad (73)$$

qui doit avoir lieu dans tout l'espace occupé par le diélectrique. Enfin, la fonction φ ne présentera aucune discontinuité. On arrivera (§§ 107 et 108) à la solution du problème proposé (§ 102) si on combine ces formules avec celles qui expriment $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ en fonction de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ et que nous allons déduire (§§ 104—106) des équations (70).

§ 104. Pour calculer les forces $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ qui entrent dans ces dernières formules, je décris dans le diélectrique une sphère B qui a son centre dans la molécule considérée et dont le rayon est très grand par rapport aux distances moléculaires, tout en étant si petit que les fonctions $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$, $\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}$ peuvent être considérées comme constantes à l'intérieur de la surface. En appliquant à la partie du diélectrique qui est extérieure à la sphère le théorème du paragraphe 102, on voit que la force ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) se compose de plusieurs parties, qui sont produites respectivement par:

a. les charges des conducteurs;

b. les charges superficielles aux densités $-\mathbf{M}_n$ dans le voisinage immédiat des conducteurs;

c. la distribution à densité

$$-\left(\frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}\right), \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

supposée exister dans le diélectrique extérieur à B;

d. une charge superficielle sur la sphère elle-même, possédant la densité

$$-\mathbf{M}_n;$$

e. les molécules qui se trouvent à l'intérieur de la sphère.

Si la troisième distribution existait aussi à l'intérieur de B, cela ne changerait rien à la force cherchée, car l'expression (74) est regardée comme constante dans l'étendue de la sphère. Il s'ensuit que les trois premières parties de la force, prises ensemble, ont les composantes:

$$-V\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -V\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -V\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Un calcul bien simple donne pour les composantes de la quatrième partie:

$$\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_x, \quad \frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_y, \quad \frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_z;$$

on aura donc, en désignant par $(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}')$ la dernière partie de la force, et en substituant dans les formules (70):

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{m}_x &= \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\left(-V\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_x+\mathfrak{X}'\right),\\
\mathbf{m}_y &= \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\left(-V\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_y+\mathfrak{Y}'\right),\\
\mathbf{m}_z &= \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\left(-V\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_z+\mathfrak{Z}'\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (75)$$

§ 105. Reste à considérer la force $(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}')$. Je représenterai par x, y et z les coordonnées du centre de la sphère, où se trouve la molécule considérée M; par x', y', z' les coordonnées du point qui, dans une autre molécule M' située à l'intérieur de la sphère, est analogue au point P (§ 101, *b*); par r la distance des deux points, par $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ les moments électriques des deux molécules. Alors:

$$\mathfrak{X}' = V^2 \Sigma \frac{1}{r^5} \Big\{ [3(x'-x)^2 - r^2]\, \mathfrak{m}_x' + 3(x'-x)(y'-y)\, \mathfrak{m}_y' +$$

$$+ 3(x'-x)(z'-z)\, \mathfrak{m}_z' \Big\} \quad . . . \quad (76),$$

la somme étant étendue à toutes les molécules M' que contient la sphère.

Il y a un cas où cette somme s'annule. C'est celui d'un système de molécules à arrangement cubique, comme le présentent les cristaux du système régulier. En effet, les moments $\mathfrak{m}_x'$, $\mathfrak{m}_y'$, $\mathfrak{m}_z'$ peuvent alors être considérés comme égaux aux moments $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ de la molécule M elle-même; de plus, on aura, en supposant les axes des coordonnées parallèles aux axes cristallographiques:

$$\Sigma \frac{(x'-x)(y'-y)}{r^5} = \Sigma \frac{(x'-x)(z'-z)}{r^5} = 0 \quad . . \quad (77)$$

$$\Sigma \frac{3(x'-x)^2 - r^2}{r^5} = \Sigma \frac{3(y'-y)^2 - r^2}{r^5} =$$

$$= \Sigma \frac{3(z'-z)^2 - r^2}{r^5} \quad . . \quad (78)$$

Les trois dernières expressions seront par conséquent égales à la troisième partie de leur somme qui est 0.

Dans les diélectriques amorphes, les molécules sont disséminées d'une manière moins régulière. Cependant, en se bornant aux corps isotropes, on arriverait encore à la conclusion:

$$\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Z}' = 0 \quad . . . . \quad (79)$$

s'il était permis de remplacer dans la somme (76) toutes les valeurs de $\mathfrak{m}_x'$, $\mathfrak{m}_y'$, $\mathfrak{m}_z'$ par de certaines valeurs moyennes et d'admettre encore les égalités (77) et (78), qui expriment que la distribution des molécules est symétrique par rapport aux trois axes.

Même si on voulait mettre en doute la conclusion (79) on pourrait remarquer que l'influence exercée par le diélectrique dépend, non pas de l'état des molécules individuelles, mais des valeurs moyennes $\overline{\mathfrak{m}}_x$, $\overline{\mathfrak{m}}_y$, $\overline{\mathfrak{m}}_z$. Or, après avoir calculé

$\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ pour une molécule M, on peut faire la même chose pour une autre molécule, en décrivant, bien entendu, autour de cette dernière une sphère B égale à celle au centre de laquelle se trouve M. A chaque molécule appartiendront donc des valeurs spéciales de $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, et on peut considérer les valeurs moyennes $\overline{\mathfrak{X}}'$, $\overline{\mathfrak{Y}}'$, $\overline{\mathfrak{Z}}'$ de ces fonctions dans un élément de volume $D\tau$. Il est clair qu'on obtiendra $\overline{\mathfrak{m}}_x$, $\overline{\mathfrak{m}}_y$ et $\overline{\mathfrak{m}}_z$ si, dans les formules (75), on remplace $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ par $\overline{\mathfrak{X}}'$, $\overline{\mathfrak{Y}}'$, $\overline{\mathfrak{Z}}'$, et pour arriver aux simplifications qui découlent des équations (79) il suffit que

$$\overline{\mathfrak{X}}' = \overline{\mathfrak{Y}}' = \overline{\mathfrak{Z}}' = 0.$$

Ceci pourrait être vrai même dans le cas où la position accidentelle des molécules M' les plus voisines du centre de la sphère donne lieu à des valeurs positives ou négatives de $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$. En effet, la ligne qui joint une molécule à celle qui en est le plus rapprochée aura toutes les directions possibles; il se pourrait donc que la distribution irrégulière et le défaut d'isotropie qui existent dans une seule des sphères B ne se fissent plus sentir dans les valeurs moyennes $\overline{\mathfrak{X}}'$, $\overline{\mathfrak{Y}}'$, $\overline{\mathfrak{Z}}'$.

§ 106. On connaît les erreurs auxquelles on s'expose dans les théories moléculaires en se servant des „valeurs moyennes" et de raisonnements aussi superficiels que les précédents. Aussi me semble-t-il préférable de ne pas supposer nulles les valeurs de $\overline{\mathfrak{X}}'$, $\overline{\mathfrak{Y}}'$, $\overline{\mathfrak{Z}}'$. Les considérations suivantes peuvent cependant nous fournir quelques renseignements sur ces valeurs.

a. Chaque molécule M se trouve en général soumise à deux forces électriques, l'une ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) étant due à tout ce qui se trouve au dehors de la sphère B, l'autre ($\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$) aux molécules situées à l'intérieur de cette surface. Supposons que $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ et que la force $\mathfrak{X}$ ait la même valeur quelle que soit la molécule M pour laquelle elle est calculée. Alors le moment électrique prendra dans chaque molécule une grandeur et une direction déterminées, qu'on pourrait trouver si on con-

naissait parfaitement la distribution des molécules. Comme, dans les corps amorphes, cette distribution est fort irrégulière, les moments électriques présenteront des changements brusques si on passe d'une molécule à une autre, et ils n'auront pas en général la direction de la force $\mathfrak{X}$.

Cependant, tout s'arrangera d'une telle façon que

$$\mathfrak{m}_x = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}(\mathfrak{X} + \mathfrak{X}'), \quad \mathfrak{m}_y = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\mathfrak{Y}', \quad \mathfrak{m}_z = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\mathfrak{Z}' \ldots (80)$$

b. Les forces $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ sont des fonctions linéaires des moments $\mathfrak{m}_x'$, $\mathfrak{m}_y'$, $\mathfrak{m}_z'$ excités dans les molécules voisines de M. Il en résulte que, si on change la grandeur de la force $\mathfrak{X}$, tous les moments changeront dans la même proportion, en conservant les directions qu'ils avaient.

c. Il existe entre les valeurs moyennes la relation suivante:

$$\overline{\mathfrak{m}}_x = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}(\mathfrak{X} + \overline{\mathfrak{X}}'), \quad \overline{\mathfrak{m}}_y = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\overline{\mathfrak{Y}}', \quad \overline{\mathfrak{m}}_z = \frac{e^2}{\mathfrak{f}}\overline{\mathfrak{Z}}'.$$

Mais il est clair que dans un corps isotrope

$$\overline{\mathfrak{m}}_y = \overline{\mathfrak{m}}_z = 0$$

et par conséquent:

$$\overline{\mathfrak{Y}}' = \overline{\mathfrak{Z}}' = 0.$$

Quant à $\overline{\mathfrak{m}}_x$, ce moment moyen doit être proportionnel à la force $\mathfrak{X}$, parce que cette proportionnalité existe pour les moments de toutes les molécules individuelles. Il y a donc également proportionnalité entre $\overline{\mathfrak{X}}'$ et $\overline{\mathfrak{m}}_x$ ou $\mathbf{M}_x$, ce que j'exprimerai par

$$\overline{\mathfrak{X}}' = s\, V^2\, \mathbf{M}_x,$$

le coefficient s étant constant pour un diélectrique donné, mais variable avec la densité.

d. Si $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ ne sont pas 0, mais que la force $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$, constante dans toute l'étendue du diélectrique, ait une direction quelconque, on aura de la même manière

$$\overline{\mathfrak{X}}' = s\, V^2\, \mathbf{M}_x, \quad \overline{\mathfrak{Y}}' = s\, V^2\, \mathbf{M}_y, \quad \overline{\mathfrak{Z}}' = s\, V^2\, \mathbf{M}_z; \ldots (81)$$

on s'en assure en introduisant pour un moment des axes des coordonnées dont l'un ait la direction de la force $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$.

e. Les relations (81) subsisteront encore si la force $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ varie d'une molécule à l'autre, pourvu que cette variation soit si lente qu'il faille passer sur un grand nombre de molécules avant qu'elle devienne sensible.

f. Voici encore une remarque qui nous sera utile dans la suite, et qui est vraie dans tous les cas où $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ ne s'annulent pas.

Supposons que, sans modifier la distribution des molécules, on en puisse changer la nature et donner ainsi à la constante $\mathfrak{f}$ une valeur nouvelle. Alors, même si on augmente ou diminue convenablement la force $\mathfrak{X}$ qu'on trouve dans les formules (80), il est impossible que les moments électriques des molécules conservent tous les mêmes valeurs. Il est également impossible qu'après le changement de $\mathfrak{f}$ les composantes de tous les moments soient proportionnelles à leurs valeurs primitives. Il en résulte que le coefficient s ne reste pas le même si $\mathfrak{f}$ vient à changer.

§ 107. En vertu des formules (75) et (81) on trouve:

$$\mathbf{M}_x = \frac{N e^2}{\mathfrak{f}}\left(-V\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_x + s V^2 \mathbf{M}_x\right), \text{ etc },$$

ou bien, si on pose:

$$\frac{N V e^2}{\mathfrak{f} - N e^2(\frac{4}{3}\pi + s) V^2} = q,$$

$$\mathbf{M}_x = -q\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathbf{M}_y = -q\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathbf{M}_z = -q\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ensuite, les équations (72) et (73) deviennent

$$(1 + 4\pi q V)\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -4\pi V S \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

et

$$\Delta \varphi = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

§ 108. Cette dernière formule, jointe aux valeurs de φ pour les différents conducteurs que je regarderai comme données et à la continuité de φ, suffit, comme on sait, à la détermi-

nation du potentiel dans tous les points de l'espace. Ensuite, l'équation (82) fait connaître la densité, et la charge de chaque conducteur est donnée par l'intégrale

$$\int S \, D \, \sigma.$$

Si l'espace extérieur aux conducteurs était occupé non pas par le diélectrique considéré, mais par l'éther, le facteur $1 + 4\pi q V$ dans l'équation (82) devrait être remplacé par l'unité, la formule (83) restant encore applicable. On voit donc que, dans un système de conducteurs maintenus à des potentiels donnés, la substitution du diélectrique pondérable à l'éther augmentera les charges dans le rapport de 1 à $1 + 4\pi q V$, et que ce qu'on appelle le pouvoir inducteur spécifique K d'un isolateur n'est autre chose que cette expression $1 + 4\pi q V$.

Il s'ensuit que

$$K = \frac{\mathfrak{f} + N e^2 \left(\frac{8}{3}\pi - s\right) V^2}{\mathfrak{f} - N e^2 \left(\frac{4}{3}\pi + s\right) V^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (84)$$

En supposant

$$s = 0$$

et en admettant que, dans un changement de densité du diélectrique ou du nombre N, les propriétés de chaque molécule et le coefficient $\mathfrak{f}$ qui en dépend ne sont pas modifiés, on trouve que l'expression

$$\frac{K - 1}{K + 2}$$

doit être proportionnelle à N, c'est-à-dire à la densité.

CHAPITRE VI.

Propagation de la lumière dans un diélectrique pondérable qui se trouve en repos.

Nature du problème.

§ 109. Il s'agira dans ce chapitre des mouvements oscillatoires que les particules chargées peuvent exécuter dans les molécules d'un diélectrique. Accompagnées de changements périodiques dans l'état de l'éther, ces vibrations constitueront un faisceau lumineux, dont je me propose d'étudier la propagation.

Pour simplifier, je supposerai de nouveau (§ 101, *b*) que chaque molécule ne contienne qu'une seule particule chargée mobile. Pour en étudier le mouvement, il faudra tenir compte des forces exercées par l'éther et données par les formules (I) (§ 90); d'autre part, les équations (II)—(V) serviront à déterminer l'état de l'éther qui est compatible avec le mouvement des particules. Dans tous les points qui sont extérieurs aux particules ces équations se réduisent à la forme plus simple:

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0,\\
\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0,\\
\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial \beta}{\partial z}=4\pi\frac{\partial f}{\partial t},\quad \frac{\partial \alpha}{\partial z}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}=4\pi\frac{\partial g}{\partial t},\\
\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}=4\pi\frac{\partial h}{\partial t},\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\frac{\partial \alpha}{\partial t},\quad 4\pi V^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\frac{\partial \beta}{\partial t},\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)=\frac{\partial \gamma}{\partial t}.
\end{array}\right\} \quad (85)$$

§ 110. Supposons, pour un moment, qu'il n'y ait qu'une seule particule chargée, qu'elle soit animée d'un mouvement donné

et qu'on soit parvenu à un système de valeurs f_1, g_1, h_1, α_1, β_1, γ_1, qui satisfait, à l'intérieur, aux équations (II)—(V) et, à l'extérieur, aux équations (85).

Supposons, de plus, qu'on ait trouvé un système analogue f_2, g_2, h_2, α_2, β_2, γ_2 pour le cas où une autre particule se déplace à travers l'éther, cette autre particule étant à son tour regardée comme la seule qui existe.

Alors, il est clair que les valeurs :

$$f = f_1 + f_2,\ g = g_1 + g_2,\ h = h_1 + h_2,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2,\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

satisferont à toutes les conditions du problème, si les deux particules existent simultanément.

Ce théorème peut être étendu à un nombre quelconque de particules chargées. On cherchera, pour chaque particule, un système de valeurs de f, g, h, α, β, γ, qui soit compatible avec son mouvement — en raisonnant comme si les autres particules n'existaient pas — et on combinera toutes ces solutions par simple addition.

Du reste, il ne faut pas croire qu'on trouverait ainsi l'état réel de l'éther. En effet, aux valeurs de f, g, h, α, β, γ, on peut toujours ajouter des valeurs quelconques qui satisfont aux équations (85).

§ 111. On peut trouver deux états différents de l'éther qui sont compatibles avec les vibrations d'une particule chargée. Dans le premier, la particule est le centre d'un ébranlement qui se propage en dehors; dans le second, des vibrations de l'éther se dirigeront de tous côtés vers la particule dont elles chercheront à maintenir les oscillations. Nous nous occuperons seulement des solutions de la première espèce, qui se présentent immédiatement à l'esprit. En effet, supposons qu'une source lumineuse commence à un certain moment à émettre des vibrations. Ce mouvement se propagera dans l'éther et atteindra à un instant déterminé la première particule chargée du diélectrique. Aussitôt, les forces déterminées par les formules (I) (§ 90) entreront en jeu ; elles déplaceront la particule et, conjoin-

tement avec les autres forces auxquelles elle est soumise, en détermineront le mouvement. Mais, en vertu de son agitation, la particule devient elle-même le centre d'un ébranlement qui se propage dans toutes les directions et se superpose à l'état de l'éther déjà existant. Au moment où elle est atteinte par les vibrations électriques de l'éther, chaque molécule suivra l'exemple de la première, et en définitive des vibrations émaneront de toutes les particules chargées.

Il importe cependant de remarquer qu'on peut opérer avec une solution particulière quelconque qui s'accorde avec le mouvement des particules, pourvu seulement qu'on rétablisse la généralité nécessaire en ajoutant à cette solution une autre, qui satisfait partout aux équations (85).

Si, dans les pages suivantes, il est question du mouvement que „produit" une particule vibrante, cela servira simplement à indiquer une solution particulière qui est compatible avec les oscillations.

Vibrations dans l'éther produites par une seule molécule.

§ 112. Des équations (II)—(V) (§ 90) on peut éliminer cinq quelconques des variables

$$f,\ g,\ h,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

On trouve ainsi:

$$V^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho \xi)}{\partial t}, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots (86)$$

$$V^2 \Delta \alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 4 \pi V^2 \left(\eta \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right), \text{ etc.} \quad \ldots (87)$$

En appliquant ces formules à une molécule qui contient une particule mobile P, je me bornerai à un cas bien simple; c'est celui où les écarts de la position naturelle sont infiniment petits par rapport aux dimensions de la particule elle-même. Hâtons-nous d'ajouter que les résultats resteront vrais

si l'amplitude des vibrations est beaucoup plus grande, pourvu seulement qu'elle soit très petite en comparaison des distances moléculaires. Cette extension de la théorie ne se trouvera pas dans le chapitre présent; elle sera reléguée à la „Note additionnelle" qui terminera ce mémoire [1]. J'ai pris ce parti dans l'espoir de faciliter ainsi la lecture et de faire mieux ressortir les traits essentiels de la théorie que je désire proposer.

§ 113. Soient: x, y, z les projections du déplacement de la particule mobile et ϱ_0 la densité électrique au point (x, y, z), dans le cas où elle a sa position naturelle. Alors, on aura dans les formules (86) et (87)

$$\varrho = \varrho_0 - \mathrm{x} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} - \mathrm{y} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} - \mathrm{z} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z}, \quad \ldots \ldots (88)$$

$$\xi = \frac{d\mathrm{x}}{dt}, \; \eta = \frac{d\mathrm{y}}{dt}, \; \zeta = \frac{d\mathrm{z}}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots (89)$$

et, comme ces dernières quantités sont, par supposition, infiniment petites, ainsi que x, y, z,

$$V^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial \varrho_0}{\partial x} - \mathrm{x} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x^2} - \mathrm{y} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x \partial y} - \mathrm{z} \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x \partial z}\right) + \\ + \varrho_0 \frac{d^2 \mathrm{x}}{dt^2}, \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \ldots (90)$$

$$V^2 \Delta \alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 4\pi V^2 \left(\frac{d\mathrm{y}}{dt} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} - \frac{d\mathrm{z}}{dt} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y}\right), \text{ etc. } (91)$$

Lorsqu'on a en vue les valeurs de $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ qui dépendent de la particule mobile seule, il faut admettre qu'en dehors de l'espace qu'elle occupe,

$$V^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \text{ etc.}, \quad V^2 \Delta \alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0, \text{ etc.},$$

ou bien, si on veut appliquer les formules (90) et (91) à l'espace tout entier, il faut poser $\varrho_0 = 0$ dans tous les points extérieurs.

[1]) Dans cette Note il sera toujours question d'un diélectrique qui se déplace, mais on peut, dans toutes les formules, supposer nulle la vitesse de ce déplacement.

§ 114. Les équations (90) et (91) peuvent être mises sous la forme [1]):

$$V^2 \Delta f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} - V^2 \left\{ \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial x \, \partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial x \, \partial z} \right\} + \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial t^2}, \text{ etc.} \quad (92)$$

et

$$V^2 \Delta \alpha - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 4 \pi V^2 \left\{ \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 (\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial y \, \partial t} \right\}, \text{ etc.} \quad (93)$$

On y satisfera en introduisant quatre fonctions auxiliaires ω, χ_1, χ_2, χ_3, au moyen des conditions:

$$V^2 \Delta \omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \varrho_0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (94)$$

$$V^2 \Delta \chi_1 - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} = \varrho_0 \mathrm{x}, \quad V^2 \Delta \chi_2 - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} = \varrho_0 \mathrm{y},$$

$$V^2 \Delta \chi_3 - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial t^2} = \varrho_0 \mathrm{z}, \quad . \quad (95)$$

et en posant

$$f = V^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} - V^2 \left\{ \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \, \partial z} \right\} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, \text{ etc.} \quad (96)$$

$$\alpha = 4 \pi V^2 \left\{ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \, \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y \, \partial t} \right\}, \text{ etc.} \quad \ldots \quad (97)$$

La densité ϱ_0 est indépendante du temps; il en sera donc de même de la fonction ω, et elle sera déterminée par la relation:

$$\Delta \omega = \frac{1}{V^2} \varrho_0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (98)$$

On s'assure facilement que les valeurs (96) et (97) satisfont aux équations primitives (II)—(V). On trouve, par exemple,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = V^2 \Delta \omega - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V^2 \Delta \chi_1 - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left\{ V^2 \Delta \chi_2 - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ V^2 \Delta \chi_3 - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial t^2} \right\} =$$

$$= \varrho_0 - \mathrm{x} \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} - \mathrm{y} \frac{\partial \varrho_0}{\partial y} - \mathrm{z} \frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = \varrho.$$

---

[1]) En effet, ϱ_0 est indépendant du temps, et x, y et z sont indépendants de x, y, z.

§ 115. D'après les formules (96), les fonctions f, g et h contiennent les termes

$$V^2 \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad V^2 \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad V^2 \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

qui sont indépendants du mouvement de la particule. Or, tant que cette dernière est maintenue dans sa position d'équilibre, la molécule entière dont elle fait partie n'exerce aucune action sensible en des points qui sont situés à quelque distance, par exemple, dans une molécule voisine. Il s'ensuit qu'en de tels points les parties immobiles de la molécule produisent un déplacement diélectrique égal et opposé à celui qui a pour composantes les expressions (99). Si donc on convient d'entendre par f, g, h, α, β, γ les valeurs qui sont dues à la *molécule entière*, on aura à quelque distance,

$$f = -V^2 \left\{ \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \, \partial z} \right\} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}, \text{ etc. } (100)$$

$$\alpha = 4\pi V^2 \left\{ \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \, \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y \, \partial t} \right\}, \text{ etc. } \ldots (101)$$

Quant aux fonctions χ, elles peuvent être déterminées à l'aide des théorèmes qu'on trouvera dans les deux paragraphes suivants.

Théorèmes mathématiques.

§ 116. Soient: τ' un espace limité par une surface quelconque σ ; $d\tau'$ un élément de volume situé au point variable (x', y', z'); (x, y, z) un point qui est situé dans l'espace τ' et qui est regardé comme fixe si on veut effectuer les intégrations dont il s'agira tout à l'heure; $U\ (x', y', z', x, y, z)$ une fonction qui est finie et continue pour toutes les valeurs des coordonnées, excepté pour

$$x' = x, \ y' = y, \ z' = z.$$

Considérons l'intégrale:

$$I = \int_{\mathrm{r}} U\,(x', y', z', x, y, z)\, d\,\tau',$$

où l'indice r indique qu'il faut exclure du champ de l'intégration une sphère b, à rayon r, ayant pour centre le point (x, y, z), le rayon étant toujours le même quelle que soit la position de ce dernier point.

L'intégrale sera une fonction de x, y et z, et on a le *théorème* que voici:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{r}} \int (x'-x)\, U\, d\, b + \int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x}\, d\,\tau' \quad \ldots\ldots \quad (102)$$

où la première intégrale est étendue à la surface de la sphère.

Démonstration. Soient:

A le point (x, y, z),

B le point $(x + \delta, y, z)$, δ étant une longueur infiniment petite,

I_A et I_B les valeurs de l'intégrale relatives à ces deux points.

Il s'agit de calculer:

$$\frac{\partial\, I}{\partial\, x} = \frac{I_B - I_A}{\delta}.$$

Supposons qu'en déplaçant le point (x, y, z) de A vers B on donne, en même temps, une translation égale à tous les éléments $d\,\tau'$. L'ensemble des éléments déplacés, que je nommerai $(d\,\tau')$, constitue un espace qui est limité à l'intérieur par la sphère b décrite autour du point B, c'est-à-dire par la sphère jusqu'à laquelle il faut étendre l'intégrale I_B, et à l'extérieur par une surface (σ) qui n'est autre chose que la surface σ déplacée sur une distance δ.

Il en résulte que, pour changer I_A en I_B, il faut d'abord remplacer, dans la fonction U, x' et x par $x' + \delta$ et $x + \delta$; de la valeur ainsi obtenue il faut retrancher l'intégrale

$$\int U\,(x', y', z', x, y, z)\, d\,\tau'$$

étendue à la zone qui se trouve à l'intérieur de (σ) et à l'extérieur de σ, et il y faut ajouter une intégrale analogue relative

à la zone qui est à la fois extérieure à (σ) et intérieure à σ.

Tout ceci se traduit par la formule

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x'} d\tau' + \int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau' - \int U \cos(n, x)\, d\sigma, \ldots (103)$$

dans laquelle n désigne la normale à la surface, menée vers l'extérieur.

La première intégration peut être effectuée. On trouve:

$$\int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x'} d\tau' = \int U \cos(n, x)\, d\sigma - \frac{1}{\mathrm{r}} \int (x'-x)\, U\, d b,$$

d'où il suit:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{r}} \int (x'-x)\, U\, d b + \int_{\mathrm{r}} \frac{\partial U}{\partial x} d\tau'. \quad C. Q. F. D.$$

Remarquons que cette relation doit avoir lieu quelque petite que soit la valeur de r. En désignant par $\int$ la limite vers laquelle tend $\int_{\mathrm{r}}$, quand on diminue de plus en plus le rayon, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int U\, d\tau' = -\mathrm{Lim} \left[\frac{1}{\mathrm{r}} \int (x'-x)\, U\, d b\right] + \int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau' \ldots (104)$$

Du reste, cette formule est encore applicable si l'espace τ' s'étend à l'infini, ou si, cet espace étant limité, le point (x, y, z) se trouve à l'extérieur. Le dernier de ces deux cas rentre dans le premier lorsqu'on suppose que l'espace τ' est infini mais que la fonction U s'annule dans une certaine région. Si le point (x, y, z) appartient à cette région, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int U\, d\tau' = \int \frac{\partial U}{\partial x} d\tau'.$$

§ 117. *Théorème.* Employons de nouveau les notations du paragraphe précédent, et représentons par r la distance des points (x, y, z) et (x', y', z'), par F une fonction finie et continue. Je dis que la fonction

$$\chi = -\frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right) d\tau'$$

satisfait à l'équation :

$$V^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = F(t, x, y, z).$$

Démonstration. Le théorème précédent donne :

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi V^2} \text{Lim} \left[\frac{1}{r} \int \frac{x' - x}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \, db \right] -$$

$$- \frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} d\tau'.$$

Pour déterminer la limite, on peut, dans le premier terme, remplacer

$$F\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right) \text{ par } F(t, x, y, z).$$

On voit alors que ce terme s'évanouit et que

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = - \frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} d\tau',$$

d'où il suit, par une nouvelle application de la formule (104),

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi V^2} \text{Lim} \left[\frac{1}{r} \int (x' - x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} db \right]$$

$$- \frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} d\tau' \quad \ldots \quad (105)$$

Soit $F'(t, x, y, z)$ la dérivée de $F(t, x, y, z)$ par rapport à t. Alors :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} =$$

$$- \frac{x - x'}{r^3} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') - \frac{x - x'}{r^2 V} F'\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right),$$

ce que, dans le premier terme du second membre de (105), on peut remplacer par :

$$- \frac{x - x'}{r^3} F(t, x, y, z) - \frac{x - x'}{r^2 V} F'(t, x, y, z).$$

En définitive :

$$V^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{1}{3} F(t, x, y, z) - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{r} F(t - \frac{r}{V}, x', y', z') \right\} d\tau'.$$

Il y a des formules analogues pour

$$V^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \text{ et } V^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2},$$

et comme:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right) \right\} d\tau',$$

on trouve:

$$V^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = F(t, x, y, z) -$$

$$-\frac{1}{4\pi V^2} \int \left(V^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right) \right\} d\tau'.$$

Or, un calcul direct nous apprend que

$$\left(V^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V}, x', y', z'\right) \right\} = 0; \quad (106)$$

donc:

$$V^2 \Delta \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = F(t, x, y, z). \qquad C. Q. F. D.$$

§ 118. La proposition que je viens de démontrer peut être regardée comme une extension du théorème de *Poisson*, qui joue un rôle si important dans la théorie du potentiel et auquel on revient en supposant que la fonction F ne renferme pas le temps t. De même, la formule (106), que, sans en diminuer la généralité, on peut remplacer par

$$\left(V^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V} \right) \right\} = 0, \quad . . . (107)$$

est analogue à l'équation de *Laplace* pour la fonction $\frac{1}{r}$.

Cette formule (107) est connue depuis longtemps; après l'avoir trouvée, il est tout naturel de rechercher ce que devient

$$\Delta \int \frac{1}{r} F(x', y', z') \, d\tau'$$

si on y remplace

$$\frac{1}{r} F(x', y', z')$$

par

$$\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V} . x', y', z'\right).$$

Détermination de χ_1, χ_2, χ_3 *et de* f, g, h, α, β, γ.

§ 119. Le théorème du paragraphe 117 conduit immédiatement à une solution des équations (95). Soient: A le point (x, y, z) situé à l'extérieur de la molécule et pour lequel on veut calculer les valeurs des fonctions relatives au temps t, B un point de l'espace occupé par la particule mobile, $d\tau'$ un élément de volume au point B, ϱ_0 la densité électrique en B lorsque la particule a sa position naturelle, r la distance AB, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ le déplacement à l'instant $t - \frac{r}{V}$. On aura:

$$\chi_1 = -\frac{1}{4\pi V^2}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{x}}{r} d\tau', \quad \chi_2 = -\frac{1}{4\pi V^2}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{y}}{r} d\tau',$$

$$\chi_3 = -\frac{1}{4\pi V^2}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{z}}{r} d\tau'. \quad (108)$$

où les intégrales doivent être étendues à toute la particule vibrante.

A la rigueur, ni r, ni, par conséquent, x, y, z n'auront les mêmes valeurs pour les différents éléments $d\tau'$. Vu, cependant, l'extrême petitesse, par rapport à la distance AB, que nous attribuons à la particule, on pourra remplacer tous les r par la distance de A au point où se trouve le centre de la particule dans sa position naturelle. C'est cette distance qui sera désignée par r dans les formules qui vont suivre.

En représentant par $(\mathfrak{m}'_x, \mathfrak{m}'_y, \mathfrak{m}'_z)$ le moment électrique (§ 101) à l'instant $t - \frac{r}{V}$, on trouve:

$$\int \frac{\varrho_0 \mathrm{x}}{r} d\tau' = \frac{\mathrm{x}}{r}\int \varrho_0 \, d\tau' = \frac{e\,\mathrm{x}}{r} = \frac{\mathfrak{m}'_x}{r}, \text{ etc.}$$

et finalement, au lieu des expressions (100) et (101),

$$f = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{r}\right)\right\} - $$
$$- \frac{1}{4\pi V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{r}\right), \text{ etc. } \quad (109)$$

$$\alpha = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{r}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{r}\right), \text{ etc. } \ldots \quad (110)$$

Ces expressions peuvent encore être appliquées lorsque, contrairement à la supposition du paragraphe 112, l'amplitude des vibrations est plus grande que le diamètre de la particule, tout en restant beaucoup plus petite que la distance r. C'est ce qu'on verra démontré dans la Note additionnelle.

Intensité de la force qu'une particule vibrante éprouve en vertu de l'état de la molécule dont elle fait partie.

§ 120. Les valeurs (109) et (110), portées dans les formules (I) (§ 90), peuvent servir à déterminer la force que l'une des molécules exerce sur la particule mobile qui appartient à une autre; nous en déduirons bientôt (§ 125) l'action qu'une particule déterminée P subit de la part de toutes les molécules environnantes. Cependant, avant d'aborder ce calcul, nous allons considérer la force à laquelle elle est soumise en vertu de l'état de l'éther qu'elle excite elle-même.

A cet effet, il est nécessaire d'étudier les valeurs que les fonctions f, g, h, α, β, γ, déterminées par les équations (92) et (93), présentent à l'intérieur de la particule.

On peut toujours employer les formules (96), (97) et (108); seulement, ces dernières se simplifient, parce que, dans le problème actuel, r est tout au plus égal au diamètre de la particule, et, par conséquent, extrêmement petit par rapport à la longueur d'onde. La quantité $\frac{r}{V}$ n'est donc qu'une fraction insignifiante du temps d'oscillation et il est permis, dans les formules (108), de remplacer x, y, z par:

$$\mathrm{x} - \frac{r}{V}\dot{\mathrm{x}}, \quad \mathrm{y} - \frac{r}{V}\dot{\mathrm{y}}, \quad \mathrm{z} - \frac{r}{V}\dot{\mathrm{z}},$$

si l'on convient d'entendre par x, y, z, $\dot{\mathrm{x}}, \dot{\mathrm{y}}, \dot{\mathrm{z}}$ les valeurs relatives au temps t.

Comme, d'après la formule (98),

$$\omega = -\frac{1}{4\pi V^2}\int \frac{\varrho_0}{r}\, d\tau',$$

on trouve:

$$\chi_1 = -\frac{1}{4\pi V^2}\left\{ \mathrm{x}\int \frac{\varrho_0}{r}\, d\tau' - \frac{\dot{\mathrm{x}}}{V}\int \varrho_0\, d\tau' \right\} = \mathrm{x}\,\omega + \frac{\dot{\mathrm{x}}\, e}{4\pi V^3}, \text{ etc.}$$

Substituons dans les formules (I), en ayant égard à la relation (88) et à ce que x, y, z sont regardés comme infiniment petits. Il vient pour la première composante de la force cherchée, si on remplace $\dot{\mathrm{x}}$ par ξ,

$$4\pi V^4 \left[\int \varrho_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}\, d\tau - \mathrm{x}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) d\tau - \right.$$
$$\left. - \mathrm{y}\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) d\tau - \mathrm{z}\int \frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho_0 \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) d\tau \right] +$$
$$+ 4\pi V^2 \dot{\xi}\int \varrho_0\, \omega\, d\tau + \frac{\ddot{\xi}\, e}{V}\int \varrho_0\, d\tau.$$

Ici, la première intégrale est 0, parce que la distribution des fonctions ϱ_0 et ω est symétrique autour du centre; il en est de même des trois intégrales suivantes, puisque ϱ_0 s'annule à la surface de la particule. On trouve, par conséquent, pour les composantes de la force cherchée:

$$4\pi V^2 \dot{\xi}\int \varrho_0\, \omega\, d\tau + \frac{\ddot{\xi}\, e^2}{V}, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (111)$$

Si le mouvement de la particule est une vibration simple, les signes des dérivées $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$ sont opposés à ceux des vitesses ξ, η, ζ. La force aux composantes

$$\frac{\ddot{\xi}\, e^2}{V}, \quad \frac{\ddot{\eta}\, e^2}{V}, \quad \frac{\ddot{\zeta}\, e^2}{V}$$

s'oppose donc au mouvement. Il est naturel qu'il y ait une

telle „résistance": sans cela, en effet, la particule ne pourrait céder de l'énergie à l'éther.

Aussi bien que les formules (109) et (110), les expressions (111) restent applicables lorsque les excursions de la particule sont plus grandes que le diamètre. (Voir la Note).

§ 121. Quant à la force avec laquelle les parties immobiles de la molécule agissent sur la particule qui est déplacée de sa position d'équilibre, je m'en tiendrai à l'hypothèse du paragraphe 101. Les composantes en seront représentées de nouveau par

$$-\mathfrak{f}\,x, \; -\mathfrak{f}\,y, \; -\mathfrak{f}\,z \; \ldots\ldots\ldots \; (112)$$

Détermination de la force totale qui agit sur une particule vibrante.

§ 122. Le calcul de la force que la particule mobile contenue dans une des molécules éprouve de la part de toutes les autres molécules ressemble beaucoup à celui qui nous a servi à l'évaluation du pouvoir inducteur spécifique.

Je désignerai de nouveau par

$$\overline{\mathfrak{m}}_x, \; \overline{\mathfrak{m}}_y, \; \overline{\mathfrak{m}}_z$$

les valeurs moyennes de $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ (§ 102) et par

$$\mathfrak{M}_x = N\overline{\mathfrak{m}}_x, \; \mathfrak{M}_y = N\overline{\mathfrak{m}}_y, \; \mathfrak{M}_z = N\overline{\mathfrak{m}}_z$$

les composantes du moment électrique rapporté à l'unité de volume. Ces composantes seront des fonctions du temps et des coordonnées; elles ne présenteront plus les changements brusques et irréguliers (§ 106, *a*) qu'on trouve dans les moments $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$.

Il importe de remarquer que, lorsqu'il s'agit de fonctions telles que $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, on peut attacher aux signes $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ une signification un peu différente de celle qu'ils avaient jusqu'ici. Pour obtenir, par exemple, $\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x}$, on peut considérer

une ligne $P\,Q = D\,x$, parallèle à l'axe des x, et qui, loin d'être infiniment petite dans le sens rigoureux du mot, est beaucoup plus grande que les distances moléculaires. Il suffira que, dans l'étendue de cette ligne, le changement de $\mathbf{M}_x$ soit très petit par rapport à ce moment lui-même; alors, on pourra prendre pour $\frac{\partial\,\mathbf{M}_x}{\partial\,x}$ le quotient qu'on obtient en divisant par $D\,x$ la différence des valeurs de $\mathbf{M}_x$ aux points P et Q. Evidemment, dans les problèmes qui nous occupent, la condition à remplir revient à ce que $D\,x$ doit être une très petite fraction de la longueur d'onde.

Un signe spécial pour indiquer les différentiations prises dans ce sens nouveau me semble superflu; dans chaque cas particulier on comprendra facilement ce qu'il faut entendre par $\frac{\partial}{\partial\,x}$, $\frac{\partial}{\partial\,y}$, $\frac{\partial}{\partial\,z}$.

§ 123. Je considère un diélectrique pondérable, homogène et isotrope, qui est limité par une surface σ, et je me propose d'établir les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ à l'intérieur de ce corps. Des mouvements électriques peuvent également avoir lieu à l'extérieur de la surface, mais il n'est pas nécessaire de supposer quelque chose à leur égard.

Soit M une molécule située au point (x, y, z). La particule mobile qu'elle contient est d'abord soumise aux forces (111) et (112) et, en second lieu, à une force qu'on calcule en prenant, dans les formules (I) (§ 90), pour f, g, h, α, β, γ les valeurs qui existent indépendamment de la molécule M elle-même. Toutes ces valeurs peuvent être regardées comme constantes dans l'étendue de la particule et les formules (I) prennent, par conséquent, la forme

$$\mathfrak{X} = 4\,\pi\,V^2\,e\,f + e\,(\eta\,\gamma - \zeta\,\beta), \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (113)$$

Je construis de nouveau la sphère B dont il a été question dans la théorie du pouvoir inducteur spécifique (§ 104), et je

décompose les valeurs de f, g, h, α, β, γ, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ dans les parties suivantes:

a. celles qui sont produites par les molécules du diélectrique, extérieures à la sphère B;

b. celles qui sont dues aux molécules à l'intérieur de la sphère — la molécule M elle-même étant toutefois exceptée;

c. celles qui sont indépendantes de toutes les molécules nommées.

Je supposerai que dans l'étendue entière de la sphère les moments $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ ont sensiblement des valeurs constantes. Cela exige que le rayon R soit très petit par rapport à la longueur d'onde.

Si, après avoir calculé les valeurs de f, g, h, α, β, γ, etc. pour une molécule M, on veut passer à une autre molécule, on construira autour de celle-ci comme centre une nouvelle sphère B, égale à la première.

§ 124. Soient: $D\tau'$ un élément de l'espace τ' compris entre les deux surfaces B et σ,

x', y', z' les coordonnées du centre de cet élément,

$\mathbf{M}'_x$, $\mathbf{M}'_y$, $\mathbf{M}'_z$ les valeurs des moments électriques dans ce point,

r la distance du point (x', y', z') au point (x, y, z).

En vertu de l'équation (109), la première composante du déplacement diélectrique produit par toutes les molécules de l'espace τ' a, dans la molécule M, la valeur:

$$f = \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\mathbf{M}'_y}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\mathbf{M}'_z}{r}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right)\right] D\tau',$$

où il faut entendre par $\mathbf{M}'_x$, $\mathbf{M}'_y$, $\mathbf{M}'_z$ les valeurs qui correspondent au temps $t - \frac{r}{V}$.

Mais, en appliquant le théorème du paragraphe 116, on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\mathbf{M}'_x}{r} D\tau' = -\frac{1}{R^2}\int(x' - x)\,\mathbf{M}'_x\, D B + \int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau',$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\mathbf{M}'_x}{r} D\tau' = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau', \quad . \; . \; . \; . \quad (114)$$

parce que, en intégrant sur la surface sphérique, on peut remplacer $\mathbf{M}'_x$ par la valeur $\mathbf{M}_x$ qui existe au centre au moment t.

Une nouvelle application du même théorème donne :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int \frac{\mathbf{M}'_x}{r} D\tau' = -\frac{1}{R}\int (x' - x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D B +$$

$$+ \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau' = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{M}_x + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau' \; . \; (115)$$

On a, au contraire,

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\int \frac{\mathbf{M}'_y}{r} D\tau' = \int \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\mathbf{M}'_y}{r}\right) D\tau',$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\int \frac{\mathbf{M}'_z}{r} D\tau' = \int \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial z}\left(\frac{\mathbf{M}'_z}{r}\right) D\tau',$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \frac{\mathbf{M}'_x}{r} D\tau' = \int \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau'.$$

Posons :

$$\int \frac{\mathbf{M}'_x}{r} D\tau' = \mathfrak{M}_x, \; \int \frac{\mathbf{M}'_y}{r} D\tau' = \mathfrak{M}_y, \; \int \frac{\mathbf{M}'_z}{r} D\tau' = \mathfrak{M}_z;$$

alors :

$$f = \frac{1}{3}\mathbf{M}_x + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x\, \partial z} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2}\right] \; . \; (116)$$

On trouve de la même manière :

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial y\, \partial t} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial z\, \partial t} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (117)$$

§ 125. Lorsqu'on veut calculer les forces (113), il faut multiplier par $4\pi V^2 e$ l'expression (116) et par $e\eta$ ou $\epsilon\zeta$ la valeur de α. Or, les fonctions $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ seront en général du même ordre de grandeur. En outre, lorsqu'il s'agit d'un faisceau lumineux, elles seront périodiques par rapport au

temps, la période étant égale à la durée ϑ d'une vibration, et elles présenteront une variation considérable et même un changement de signe si on passe d'un point à un autre qui en est éloigné de la demi-longueur d'onde. Si la longueur d'onde est représentée par λ, l'amplitude par δ et une quelconque des fonctions $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ par $\mathfrak{M}$, on aura

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} (=) \frac{\mathfrak{M}}{\vartheta^2}, \quad \alpha (=) \frac{\mathfrak{M}}{\lambda \vartheta}, \quad \eta (=) \zeta (=) \frac{\delta}{\vartheta}.$$

Il en résulte que les derniers termes des expressions (113) divisés par les premiers termes, sont de l'ordre:

$$\frac{\delta}{\lambda}.$$

Comme δ est beaucoup plus petit que la longueur d'onde on peut se borner aux termes $4 \pi V^2 e f$, etc. et écrire pour les composantes de la force que la particule mobile subit de la part de toutes les molécules qui se trouvent dans l'espace τ':

$$\frac{4}{3}\pi V^2 e \mathbf{M}_x + V^2 e \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x \partial z} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} \right], \quad (118)$$

etc.

§ 126. Soient

$$f_0, g_0, h_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$$

les composantes du déplacement diélectrique et de la force magnétique qui existent indépendamment des molécules incluses dans la surface σ. Les équations (85) démontrent que les rapports

$$\frac{\alpha_0}{f_0}, \frac{\beta_0}{f_0}, \text{etc.}$$

sont de l'ordre V, ce qui donne lieu à la même simplification que j'ai fait connaître au paragraphe précédent. Je prendrai donc pour les composantes de la force qui est due à cet état de l'éther:

$$4 \pi V^2 e f_0, \; 4 \pi V^2 e g_0, \; 4 \pi V^2 e h_0 \; \ldots \ldots \quad (119)$$

§ 127. Je représente par $\mathfrak{m}'_x$, $\mathfrak{m}'_y$, $\mathfrak{m}'_z$ les valeurs, au moment t, des moments électriques d'une des molécules M' qui se trouvent à l'intérieur de la sphère B, et par $(\mathfrak{m}'_x)$, $(\mathfrak{m}'_y)$, $(\mathfrak{m}'_z)$ ces mêmes moments, à l'instant $t - \frac{r}{V}$, r étant la distance au centre (x, y, z) de la sphère.

Si, dans la formule (109), on remplace $\mathfrak{m}'_x$, $\mathfrak{m}'_y$, $\mathfrak{m}'_z$ par $(\mathfrak{m}'_x)$, $(\mathfrak{m}'_y)$, $(\mathfrak{m}'_z)$, on obtiendra la première composante du déplacement diélectrique que cette molécule M' produit à l'intérieur de M.

Mais:

$$(\mathfrak{m}'_x) = \mathfrak{m}'_x - \frac{r}{V}\frac{d\,\mathfrak{m}'_x}{d\,t} + \ldots, \text{ etc.},$$

d'où l'on tire:

$$f = \frac{1}{4\pi}\left[\mathfrak{m}'_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}'_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}'_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

en omettant des termes de l'ordre

$$\frac{1}{V^2 r}\frac{d^2\,\mathfrak{m}'_x}{d\,t^2}.$$

On s'assure facilement que ces derniers termes donnent lieu à une partie de la force

$$4\pi V^2 e f$$

qui peut être négligée par rapport au premier terme de l'expression (118) et qu'on peut également laisser de côté les forces

$$e(\eta\gamma - \zeta\beta), \text{ etc.}$$

produites par les molécules M'.

Ces molécules intérieures à la sphère B exercent donc une force dont la première composante a la valeur:

$$eV^2\Sigma\left[\mathfrak{m}'_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}'_y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{m}'_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]. \quad (120)$$

Cette somme a la même forme que l'expression

$$e\mathfrak{X}'$$

que nous avons rencontrée dans le calcul du pouvoir inducteur spécifique. Elle sera même égale à $e\mathfrak{X}'$, si, dans les deux cas, $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ ont les mêmes valeurs. En effet, l'expression

(120) nous fait voir que des molécules très rapprochées les unes des autres agissent mutuellement, comme elles le feraient s'il y avait équilibre électrique. Les variations irrégulières de $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ sont donc les mêmes dans les deux problèmes.

Équations du mouvement d'une particule.

§ 128. La force totale qui agit sur une particule mobile se trouve entièrement déterminée par les expressions (111), (112), (118), (119) et (120). Elle doit être égale au produit de l'accélération de la particule par sa masse m.

La première équation du mouvement est donc:

$$m\ddot{\xi} = -\mathfrak{f}_x + 4\pi V^2 \ddot{\xi}\int \varrho_0 \omega\, d\tau + \frac{e^2}{V}\dddot{\xi} + \frac{4}{3}\pi V^2 e \mathbf{M}_x +$$
$$+ V^2 e \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x \partial z} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2}\right] +$$
$$+ 4\pi V^2 e f_0 + e\mathfrak{X}' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

Pour la simplifier, je fais remarquer d'abord que les termes

$$\frac{e^2}{V}\dddot{\xi} \quad \text{et} \quad \frac{4}{3}\pi V^2 e \mathbf{M}_x$$

sont du même ordre de grandeur que les expressions

$$\frac{e\,\bar{\mathfrak{m}}_x}{\vartheta^3 V} \quad \text{et} \quad V^2 e N \bar{\mathfrak{m}}_x.$$

Le rapport de ces dernières est

$$N\vartheta^3 V^3,$$

ce qui représente le nombre des molécules qui se trouvent dans un cube ayant pour côté la longueur d'onde. Le terme

$$\frac{e^2}{V}\dddot{\xi}$$

peut donc être négligé.

Je poserai encore:

$$m - 4\pi V^2 \int \varrho_0 \omega\, d\tau = \varkappa.$$

je prendrai les valeurs moyennes (§ 95) de tous les termes, je diviserai par $e\,V$ et j'introduirai la valeur de $\bar{\mathfrak{X}}'$ (§ 106) et la constante q (§ 107). Tout ceci nous fournit l'équation

$$\frac{1}{q}\,\mathbf{M}_x + \frac{\varkappa}{N e^2 V}\frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial t^2} = V\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x\,\partial z} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2}\right] + 4\pi V f_0 \quad . \; . \; . \quad (122)$$

Propagation de la lumière.

§ 129. Voici, comment on peut déduire de cette formule une équation différentielle contenant seulement $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$.

Appliquons à tous les termes l'opération indiquée par le signe

$$\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Alors, le dernier terme disparaît parce que f_0 satisfait à l'équation

$$\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_0 = 0.$$

Pour les autres termes du second membre,

$$\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2},\ \left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x\,\partial y},\ \text{etc.},$$

on peut écrire:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_x\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_y,\ \text{etc.}$$

Mais, d'après la formule (115) et les deux autres qui lui sont analogues,

$$\Delta\,\mathfrak{M}_x = -4\pi\,\mathbf{M}_x + \int \Delta\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau',$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_x = -4\pi\,\mathbf{M}_x + \int\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) D\tau'.$$

Grâce à la signification de $\mathbf{M}'_x$ (§ 124) et en vertu de la formule (107), la fonction

$$\frac{\mathbf{M}'_x}{r}$$

jouit de la propriété exprimée par

$$\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{r}\right) = 0.$$

Donc

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_x &= -4\pi\,\mathbf{M}_x,\\ \left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_y &= -4\pi\,\mathbf{M}_y,\\ \left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathfrak{M}_z &= -4\pi\,\mathbf{M}_z,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (123)$$

et finalement:

$$\left(\frac{1}{q} + \frac{\varkappa}{Ne^2V}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{M}_x = -4\pi V\left[\frac{\partial^2\mathbf{M}_x}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\mathbf{M}_y}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\mathbf{M}_z}{\partial x\partial z} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\mathbf{M}_x}{\partial t^2}\right] \quad .\ .\ (124)$$

Il va sans dire qu'il y a deux équations de même forme pour $\mathbf{M}_y$ et $\mathbf{M}_z$.

Une quatrième relation peut être ajoutée à ces formules. En effet, si on prend la somme de l'équation (122) et de celles qui lui sont analogues, après les avoir différentiées respectivement par rapport à x, y et z, on trouve, en ayant égard à la relation

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial g_0}{\partial y} + \frac{\partial h_0}{\partial z} = 0$$

et aux formules (123):

$$\left(\frac{1}{q} + 4\pi V + \frac{\varkappa}{Ne^2V}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{M}_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Si l'on veut que $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ soient des fonctions périodiques ayant une période quelconque ϑ, cette formule donne

$$\frac{\partial\mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{M}_z}{\partial z} = 0.$$

Cela veut dire que les vibrations doivent être transversales.

§ 130. Supposons que les vibrations électriques dans les

molécules aient lieu dans la direction de OX et que les moments électriques soient indépendants de x et de z. Alors, l'équation (124) devient

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{\varkappa}{Ne^2 V}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{M}_x=\frac{4\pi}{V}\frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial t^2} \quad . \; . \; (125)$$

Si on pose:

$$\mathbf{M}_x = c \cos \frac{2\pi}{\vartheta}\left(t-\frac{y}{W}\right),$$

W sera la vitesse de propagation des vibrations transversales.

En substituant dans la relation (125), on trouve

$$W^2 = V^2 \frac{1-\dfrac{4\pi^2\varkappa}{Ne^2V\vartheta^2}q}{1-\dfrac{4\pi^2\varkappa}{Ne^2V\vartheta^2}q+4\pi Vq},$$

et si on désigne par

$$\nu = \frac{V}{W}$$

l'indice de réfraction,

$$\nu^2 = \frac{1-\dfrac{4\pi^2\varkappa}{Ne^2V\vartheta^2}q+4\pi Vq}{1-\dfrac{4\pi^2\varkappa}{Ne^2V\vartheta^2}q}.$$

§ 131. Ce résultat donne lieu aux conclusions suivantes:

a. Si la masse m des particules vibrantes, ou la quantité

$-4\pi V^2 \int \varrho_0 \, \omega \, d\tau$ [1]), est si grande, que le terme

$$\frac{4\pi^2\varkappa}{Ne^2V\vartheta^2}q,$$

[1]) Il résulte de la valeur de ω (§ 120) que $-4\pi V^2 \int \varrho_0 \, \omega \, d\tau$ est positif et du même ordre de grandeur que $\frac{e^2}{R}$, où R est le rayon d'une particule. Ce terme $-4\pi V^2 \int \varrho_0 \, \omega \, d\tau$ peut donc être négligé vis-à-vis de m, lorsque la condition qui a été énoncée au paragraphe 88 se trouve remplie.

tout en restant inférieur à l'unité, ait une valeur sensible, l'indice de réfraction sera d'autant plus élevé que la durée des vibrations est plus petite. On sait que, dans la théorie moderne de la dispersion de la lumière, la masse des particules pondérables qui sont supposées prendre part aux vibrations lumineuses joue un rôle important. J'ai fait remarquer [1]), il y a déjà bien des années, que la théorie électromagnétique permet une semblable explication.

b. Si la durée d'une oscillation est suffisamment longue, on aura à peu près:

$$\nu^2 = 1 + 4\pi V q.$$

Or, le second membre n'est autre chose que le pouvoir inducteur spécifique K (§ 108) et on revient à la relation, établie par *Maxwell*,

$$\nu^2 = K.$$

c. En supposant que le facteur s qui entre dans q (§ 107) peut être négligé, on trouve que, quelles que soient les valeurs de ϑ et de $\varkappa$, l'expression

$$\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2}$$

doit être proportionnelle à la densité du diélectrique. C'est la loi que j'ai fait connaître dans le mémoire cité et qui a été établie aussi par M. *Lorenz* [2]) de Copenhague. Elle ne s'accorde pas parfaitement avec les expériences, mais il n'y a en cela rien qui doive nous étonner. Non seulement la quantité s peut être différente de 0, mais il est très probable que les propriétés des molécules elles-mêmes sont modifiées par une dilatation ou une compression. Ce sont précisément ces changements sur lesquels on pourra apprendre quelque chose en étudiant les variations de l'expression

$$\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2 + 2}.$$

---

[1]) H. A. Lorentz, *Verhandelingen der Akad. v. Wet. Amst.*, T. 18, 1878, et *Wied. Ann.*, T. 9, p. 641, 1880.

[2]) L. Lorenz, *Wied. Ann.* T. 11, p. 70, 1880. Le mémoire original de M. Lorenz parut en danois en 1869.

CHAPITRE VII.

Propagation de la lumière dans un diélectrique pondérable qui se trouve en mouvement.

Equations fondamentales.

§ 132. Je supposerai dans ce chapitre que toutes les molécules du diélectrique sont animées d'une même vitesse de translation parallèle à l'axe des x et indépendante du temps. Je désignerai par p cette vitesse et tout en conservant pour le moment les axes immobiles OX, OY et OZ, j'introduirai des axes nouveaux qui sont fixement liés à la matière pondérable.

Le premier de ces axes coïncidera avec OX; les deux autres seront parallèles à OY et à OZ et coïncideront avec ces axes au moment $t = 0$. Par conséquent, les nouvelles coördonnées seront

$$(x) = x - p\,t,\ (y) = y,\ (z) = z.$$

Toute fonction φ qui dépend de x, y, z et t peut également être exprimée en (x), (y), (z) et t. J'employerai les signes:

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial t}\ \ldots\ldots\ldots \quad (126)$$

si je veux me placer au premier point de vue et les signes:

$$\frac{\partial}{\partial (x)},\ \frac{\partial}{\partial (y)},\ \frac{\partial}{\partial (z)},\ \frac{\partial}{\partial (t)}\ \ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

dans le second cas.

On voit facilement que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x)},\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial (y)},\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial (z)},$$

mais

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial (t)} - p\,\frac{\partial}{\partial (x)}.$$

§ 133. Dans les équations (II)—(V) on peut introduire les dérivées (127) au lieu des dérivées (126). Après avoir effectué cette transformation je supprimerai les axes fixes, je désignerai

par x, y, z les coördonnées prises par rapport aux axes mobiles et j'écrirai $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ pour ce qui a été représenté provisoirement par les signes (127). Enfin, j'entendrai par (ξ, η, ζ) non pas la vitesse absolue d'une particule chargée, mais sa vitesse relative par rapport à la matière pondérable, de sorte que les composantes de la vitesse absolue deviennent $\xi + p$, η et ζ.

Cela posé, les équations fondamentales prennent la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= 4\pi V^2 \int \varrho f \, d\tau + \eta \int \varrho \gamma \, d\tau - \zeta \int \varrho \beta \, d\tau, \\ \mathbf{Y} &= 4\pi V^2 \int \varrho g \, d\tau + \zeta \int \varrho \alpha \, d\tau - (\xi + p) \int \varrho \gamma \, d\tau, \\ \mathbf{Z} &= 4\pi V^2 \int \varrho h \, d\tau + (\xi + p) \int \varrho \beta \, d\tau - \eta \int \varrho \alpha \, d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}')$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \varrho \; , \; \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}')$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \; , \; \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}')$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} &= 4\pi \left\{ \varrho (\xi + p) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) f \right\}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 4\pi \left\{ \varrho \eta + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) g \right\}, \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= 4\pi \left\{ \varrho \zeta + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) h \right\}, \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{IV}')$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi V^2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha, \\ 4\pi V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta, \\ 4\pi V^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \gamma. \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{V}')$$

§ **134.** Tant que les particules chargées n'ont d'autre mouvement que la vitesse commune de la matière pondérable on

aura $\xi = \eta = \zeta = 0$ et la densité dans un point (x, y, z) sera indépendante de t. Il n'en sera plus ainsi lorsque les molécules sont le siège des vibrations électriques dont je me propose d'examiner la propagation.

Dans cet examen je suivrai pas à pas la voie qui a été tracée dans le chapitre précédent. Seulement, comme la méthode et les hypothèses resteront les mêmes, je pourrai m'exprimer plus concisément.

Remarquons encore que si, dans cette étude, il est question d'un point ou d'une surface immobile, cela signifiera: „immobile par rapport aux axes", ou, ce qui revient au même, „par rapport à la matière pondérable". Pareillement, on entendra par le déplacement $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ d'une particule le déplacement qu'elle a subi relativement à cette matière.

Vibrations produites par une seule molécule.

§ 135. On trouvera d'abord, au lieu des équations (86) et (87):

$$\left.\begin{aligned} \Box f &= V^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \{ \varrho (\xi + p) \} , \\ \Box g &= V^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \{ \varrho \eta \} , \\ \Box h &= V^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}\right) \{ \varrho \zeta \} , \end{aligned}\right\} \quad \ldots (128)$$

$$\left.\begin{aligned} \Box \alpha &= 4 \pi V^2 \left\{ \eta \frac{\partial \varrho}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial y} \right\} , \\ \Box \beta &= 4 \pi V^2 \left\{ \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial x} - (\xi + p) \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right\} , \\ \Box \gamma &= 4 \pi V^2 \left\{ (\xi + p) \frac{\partial \varrho}{\partial y} - \eta \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right\} . \end{aligned}\right\} \quad \ldots (129)$$

Dans ces formules, ainsi que dans plusieurs autres qu'on rencontrera plus loin, le signe $\Box$ est employé pour indiquer l'opération

$$V^2\Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} - p\frac{\partial}{\partial x}\right)^2.$$

§ 136. Portons dans les équations (128) et (129) les valeurs (88) et (89), et supposons que x, y, z, ξ, η, ζ soient infiniment petits. Comme x, y, z sont indépendants de x, y, z tandis que ϱ_0 est indépendant de t, on trouvera, après quelques transformations,

$$\square f = (V^2 - p^2)\frac{\partial(\varrho_0 - S)}{\partial x} + \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial t^2} - p\left\{\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial S}{\partial t}\right\},$$

$$\square g = V^2\frac{\partial(\varrho_0 - S)}{\partial y} + \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial t^2} - p\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial x\,\partial t},$$

$$\square h = V^2\frac{\partial(\varrho_0 - S)}{\partial z} + \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial t^2} - p\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial x\,\partial t},$$

$$\square \alpha = 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial z\,\partial t} - \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial y\,\partial t}\right\},$$

$$\square \beta = 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial z\,\partial t} - p\frac{\partial(\varrho_0 - S)}{\partial z}\right\},$$

$$\square \gamma = 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial^2(\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial x\,\partial t} + p\frac{\partial(\varrho_0 - S)}{\partial y}\right\},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\frac{\partial(\varrho_0 \mathrm{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho_0 \mathrm{y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho_0 \mathrm{z})}{\partial z} = S.$$

Introduisons maintenant quatre fonctions auxiliaires qui satisfont aux conditions:

$$\square\,\omega = \varrho_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (130)$$

$$\square\,\chi_1 = \varrho_0\,\mathrm{x},\ \square\,\chi_2 = \varrho_0\,\mathrm{y},\ \square\,\chi_3 = \varrho_0\,\mathrm{z}. \quad \ldots \quad (131)$$

et soit

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \chi_3}{\partial z} = S'. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (132)$$

On aura alors:

$$\left.\begin{aligned} f &= (V^2 - p^2)\,\frac{\partial(\omega - S')}{\partial x} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - p\left\{\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial S'}{\partial t}\right\}, \\ g &= V^2\,\frac{\partial(\omega - S')}{\partial y} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} - p\,\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \partial t}, \\ h &= V^2\,\frac{\partial(\omega - S')}{\partial z} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial t^2} - p\,\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial t}, \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial y \partial t}\right\}, \\ \beta &= 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2 \chi_3}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z \partial t} - p\,\frac{\partial(\omega - S')}{\partial z}\right\}, \\ \gamma &= 4\pi V^2\left\{\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \partial t} + p\,\frac{\partial(\omega - S')}{\partial y}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (134)$$

Comme la densité ϱ_0 est indépendante du temps, l'équation (130) peut être remplacée par

$$\left\{(V^2 - p^2)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\omega = \varrho_0 \quad \ldots (135)$$

Du reste, les valeurs (133) et (134) satisfont à toutes les équations (II')—(V').

§ 137. Je supposerai que, tant que la particule mobile P se trouve dans sa position d'équilibre, la molécule entière dont elle fait partie, ne fait naître, en des points éloignés, ni un déplacement diélectrique, ni une force magnétique, et cela même dans le cas, où cette molécule est animée de la vitesse p. Alors, pour obtenir les valeurs de f, g, h, α, β, γ dues à la molécule entière et relatives à des points qui se trouvent à quelque distance, il suffit de supprimer, dans les équations (133) et (134), les termes qui dépendent de ω. C'est ce qu'on reconnaîtra par un raisonnement semblable à celui qu'on trouve au paragraphe 115.

Théorèmes mathématiques qui serviront à déterminer χ_1, χ_2 et χ_3.

§ 138. Je commencerai par chercher une solution de l'équation

$$\square\, \psi = 0, \qquad \text{(136)}$$

ou

$$(V^2 - p^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + V^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2p\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

A cet effet, j'introduirai d'abord au lieu de x une nouvelle variable

$$\mathfrak{x} = \frac{V}{\sqrt{V^2 - p^2}}\, x,$$

et je poserai

$$\frac{p}{\sqrt{V^2 - p^2}} = \varepsilon.$$

L'équation devient alors

$$V^2\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right] + 2\varepsilon V\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathfrak{x} \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

La fonction ψ qui est regardée ici comme une fonction de $\mathfrak{x}$, y, z et t peut aussi être considérée comme dépendant de

$$\mathfrak{x}, y, z, \text{ et } t' = t - \frac{\varepsilon}{V}\mathfrak{x}.$$

Si on se place à ce nouveau point de vue, il faut remplacer

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}} \text{ par } \frac{\partial}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x}^2} \text{ par } \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x}^2} - 2\frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x} \partial t'} + \frac{\varepsilon^2}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ par } \frac{\partial}{\partial t'} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial t'^2},$$

et enfin

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x} \partial t} \text{ par } \frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{x} \partial t'} - \frac{\varepsilon}{V}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

On obtient ainsi

$$V^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right] - (1+\varepsilon^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} = 0,$$

ou bien

$$(V^2 - p^2)\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} = 0.$$

Cette équation a la même forme que la formule (107); elle admet donc la solution

$$\psi = \frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t' - \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{V^2 - p^2}}\right),$$

dans laquelle F est une fonction quelconque et

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{V^2}{V^2 - p^2}\, x^2 + y^2 + z^2} \,..\,(137)$$

Il en résulte que

$$\psi = \frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon x}{\sqrt{V^2 - p^2}}\right)$$

est une solution de l'équation (136).

On obtient une solution plus générale si on remplace x, y, z par $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$, x', y', z' étant les coördonnées d'un point fixe. Cette nouvelle solution peut être mise sous la forme:

$$\psi = \frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}\right), \,.\,.\,.\,.\,.\, (138)$$

si l'on attribue à $\mathfrak{r}$ la signification suivante:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\frac{V^2}{V^2 - p^2}(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z)^2} \,..\, (139)$$

§ 139. La fonction (138), analogue à la fonction

$$\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{V}\right)$$

du chapitre précédent, jouera un rôle important dans la théorie que nous allons développer. En effet, elle est propre à représenter la propagation dans l'éther d'un ébranlement qui

part d'un centre unique (x', y', z'). Les particularités de ce mouvement se réfléchiront dans la forme de la fonction F et le lieu géométrique des points (x, y, z) où cette dernière a une valeur déterminée peut recevoir le nom de „surface d'onde". Or, l'équation

$$\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x') = \text{const.}$$

représente une sphère dont, si R est le rayon, le centre est situé au point $\left(x' - \frac{p}{V} R, y', z'\right)$. Un ébranlement émis au moment t_0 par un point P de la matière pondérable et se propageant dans l'éther, aura atteint, à un moment postérieur quelconque t, la surface d'une sphère, ayant pour rayon $V(t - t_0)$ et pour centre le point de l'éther qui coïncida avec le point P à l'instant t_0. C'est un résultat auquel on aurait pu s'attendre.

Dans les paragraphes suivants on trouvera des formules plus compliquées et applicables aux cas où la source des vibrations a une certaine étendue.

§ 140. Soient:

τ' un certain espace qui se déplace avec la matière pondérable et dont par conséquent chaque point a des coördonnées x', y', z' constantes,

$d\tau'$ un élément de volume situé au point (x', y', z'),

$F(t, x', y', z')$ une fonction finie et continue.

D'après ce qui précède, la fonction

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}, x', y', z'\right)$$

satisfera à l'équation (136) et, si le point (x, y, z) est situé à l'extérieur de l'espace τ', il en sera de même de l'intégrale

$$\chi = \int \frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}, x', y', z'\right) d\tau'.$$

Mais, lorsque (x, y, z) est un point intérieur, on n'aura plus

$$\square \chi = 0.$$

C'est ce que nous allons démontrer, en entendant toujours par $\int$ la limite de l'intégrale $\int_r$ (voir le paragraphe 116).

§ 141. En appliquant la formule générale (104) on trouve d'abord:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\int \frac{x'-x}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}, x', y', z'\right) d\,b\right] +$$
$$+ \int \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}, x', y', z'\right)\right\} d\,\tau'.$$

Pour calculer la limite on peut, dans le premier terme, remplacer F par $F(t, x, y, z)$. Ce terme devient par conséquent:

$$F(t, x, y, z)\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\int \frac{x'-x}{\mathfrak{r}} d\,b\right],$$

ce qui s'annule à la limite. Donc

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}, x', y', z'\right)\right\} d\,\tau' \ . \quad (140)$$

Appliquons de nouveau la formule (104) en y substituant cette fois-ci

$$U = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}, x', y', z'\right)\right\}.$$

Si, pour abréger, la fonction qu'on trouve dans les deux dernières formules est indiquée par F, il vient:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = -\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\int (x'-x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\,b\right] +$$
$$+ \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\,\tau' =$$
$$= - F(t, x, y, z)\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\int (x'-x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) d\,b\right] +$$
$$+ \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\,\tau' \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (141)$$

On a pareillement

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = - F(t, x, y, z)\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathrm{r}}\int (y'-y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) d\,b\right] +$$
$$+ \int \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\,\tau'$$

et une équation de la même forme pour $\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$. En outre:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\tau'$$

et, en vertu de la formule (140),

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} = \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) d\tau'.$$

Substituons toutes ces valeurs dans l'expression

$$\square \chi = (V^2 - p^2)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + V^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} +$$

$$+ 2p \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}.$$

Comme on a

$$\square \left(\frac{F}{\mathfrak{r}}\right) = 0,$$

et, à la surface sphérique,

$$(V^2 - p^2)(x' - x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) + V^2 (y' - y)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) +$$

$$+ V^2 (z' - z)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = V^2 \frac{\mathrm{r}^2}{\mathfrak{r}^3},$$

on obtient

$$\square \chi = - V^2 F(t, x, y, z). \operatorname{Lim}\left[\mathrm{r}\int \frac{d b}{\mathfrak{r}^3}\right] =$$

$$= - 4\pi V \sqrt{V^2 - p^2}\, F(t, x, y, z).$$

Il en résulte que la fonction

$$\chi = - \frac{1}{4\pi V \sqrt{V^2 - p^2}} \int \frac{1}{\mathfrak{r}} F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon (x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}, x', y', z'\right) d\tau'$$

a la propriété exprimée par

$$\square \chi = F(t, x, y, z).$$

Détermination de χ_1, χ_2, χ_3 et de f, g, h, α, β, γ.

§ 142. Employons les mêmes notations qu'au commencement du paragraphe 119, avec cette différence, cependant, que nous entendons maintenant par $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ le déplacement de la particule à l'instant

$$t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon (x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}},$$

x', y', z' étant les coordonnées du point B et $\mathfrak{r}$ étant défini par la formule (139).

Alors, si on pose

$$L = 4\pi V \sqrt{V^2 - p^2}, \quad \ldots \ldots \quad (142)$$

on aura, au lieu des formules (108),

$$\chi_1 = -\frac{1}{L}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{x}}{\mathfrak{r}}\, d\tau', \quad \chi_2 = -\frac{1}{L}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{y}}{\mathfrak{r}}\, d\tau',$$

$$\chi_3 = -\frac{1}{L}\int \frac{\varrho_0 \mathrm{z}}{\mathfrak{r}}\, d\tau' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (143)$$

Lorsqu'il s'agit de l'effet qu'une molécule produit à quelque distance, il est de nouveau permis de regarder $\mathfrak{r}$, x, y et z comme ayant les mêmes valeurs dans tous les éléments. Les intégrales peuvent par conséquent être calculées de la même manière qu'au paragraphe 119. En substituant dans les équations (133) et (134), après y avoir omis les termes dépendant de ω, et en posant

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{\mathfrak{r}}\right) = S'', \quad \ldots \quad (144)$$

on trouve, au lieu des équations (109) et (110),

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{V^2 - p^2}{L}\frac{\partial S''}{\partial x} - \frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial S''}{\partial t}\right\}, \\ g &= \frac{V^2}{L}\frac{\partial S''}{\partial y} - \frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{L}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{\mathfrak{r}}\right), \\ h &= \frac{V^2}{L}\frac{\partial S''}{\partial z} - \frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{L}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{\mathfrak{r}}\right), \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{4\pi V^2}{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{\mathfrak{r}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{\mathfrak{r}}\right)\right\},\\
\beta &= \frac{4\pi V^2}{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{\mathfrak{r}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_z}{\mathfrak{r}}\right)-p\frac{\partial S''}{\partial z}\right\},\\
\gamma &= \frac{4\pi V^2}{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_y}{\mathfrak{r}}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}'_x}{\mathfrak{r}}\right)+p\frac{\partial S''}{\partial y}\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (146)$$

Ici, $\mathfrak{m}'_x$, $\mathfrak{m}'_y$ et $\mathfrak{m}'_z$ désignent les moments électriques de la molécule agissante, à l'instant

$$t-\frac{\mathfrak{r}+\varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}},$$

x', y', z' étant les coordonnées du point où elle se trouve et $\mathfrak{r}$ étant toujours défini par la formule (139).

Du reste, les équations obtenues ont encore lieu lorsque l'amplitude des vibrations surpasse le diamètre de la particule mobile (voir la Note additionnelle).

Valeur de la force qui est produite par la molécule elle-même dont la particule considérée fait partie.

§ 143. Pour trouver, comme au paragraphe 120, la réaction de l'éther sur la particule vibrante, il faut, au moyen des équations (133), (134) et (143), calculer les valeurs de f, g, h, α, β, γ à l'intérieur de la particule elle-même, pour les porter ensuite dans les équations (I') (§ 133). Dans les formules (143), x, y et z représentent les déplacements au moment

$$t-\frac{\mathfrak{r}+\varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}=t-\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{V^2-p^2}}-\frac{p(x-x')}{V^2-p^2};$$

ces lettres x, y, z doivent donc être remplacées par

$$\mathrm{x}-\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{V^2-p^2}}\dot{\mathrm{x}}-\frac{p(x-x')}{V^2-p^2}\dot{\mathrm{x}},\ \text{etc.},$$

si l'on veut entendre par x, y, z, $\dot{\mathrm{x}}$, $\dot{\mathrm{y}}$, $\dot{\mathrm{z}}$ les valeurs relatives au temps t.

On trouve ainsi:

$$\chi_1 = -\frac{\mathfrak{x}}{L}\int\frac{\varrho_0}{\mathfrak{r}}d\tau' + \frac{\dot{\mathfrak{x}}}{L\sqrt{V^2-p^2}}e +$$

$$+\frac{p\dot{\mathfrak{x}}}{L(V^2-p^2)}\int\frac{\varrho_0(x-x')}{\mathfrak{r}}d\tau', \text{ etc.}$$

Quant à la fonction ω, qui est déterminée par la condition (135), elle peut être représentée par

$$\omega = -\frac{1}{L}\int\frac{\varrho_0}{\mathfrak{r}}d\tau'.$$

§ 144. C'est ici le lieu d'introduire une simplification qui nous sera très utile dans tout ce qui suit. Elle consiste à regarder la vitesse p de la matière pondérable comme si petite, en comparaison de la vitesse de la lumière, que le carré de $\frac{p}{V}$ peut être négligé. Cela nous permet d'écrire V^2 au lieu de V^2-p^2, r ou $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ au lieu de $\mathfrak{r}$, et $4\pi V^2$ au lieu de L, ce qui nous donne

$$\chi_1 = -\frac{\mathfrak{x}}{4\pi V^2}\int\frac{\varrho_0}{r}d\tau' + \frac{\dot{\mathfrak{x}}\,e}{4\pi V^3} + \frac{p\dot{\mathfrak{x}}}{4\pi V^4}\int\frac{\varrho_0(x-x')}{r}d\tau',$$

etc.

$$\omega = -\frac{1}{4\pi V^2}\int\frac{\varrho_0}{r}d\tau'.$$

Après avoir effectué les substitutions nécessaires, entre lesquelles je citerai encore la substitution (88), et après avoir supprimé tous les termes en p^2, on remarquera dans les expressions pour les composantes de la force dont il s'agit maintenant deux groupes de termes, les uns indépendants de p, et les autres en contenant la première puissance. Je vais démontrer que ces derniers termes s'annulent et que, par conséquent, les composantes cherchées ont les mêmes valeurs que dans le cas où le diélectrique ne se déplace pas, c'est-à-dire les valeurs (111).

Cette démonstration repose sur un théorème général, qui fera l'objet des paragraphes suivants. Préalablement, je fais encore

observer que tous les termes qui contiennent la première puissance de p renferment également un des facteurs x, y, z, $\dot{x}$, etc. En effet, dans les formules (133) et (134), il n'y a que la fonction ω qui soit indépendante du mouvement vibratoire; mais dans les fonctions f, g, h les dérivées de cette fonction ne sont pas multipliées par p, et bien qu'elles le soient dans les expressions pour β et γ, ces dernières se trouvent multipliées, dans les formules (I') (§ 133), soit par une des vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, soit par la vitesse $\dot{p}$ elle-même.

Du reste, nous ne ferons aucune attention aux termes dans lesquels p est multiplié par un carré comme $\dot{x}^2$, ou par un produit comme $\dot{x}\,\dot{y}$, parce que x, y, z, $\dot{x}$, etc. sont toujours regardés comme infiniment petits.

§ 145. Concevons un système de particules chargées qui se déplacent au sein de l'éther en excitant dans ce milieu des mouvements électriques, conformément aux équations (II)—(V) (§ 90). Soit E un plan fixe et imaginons un second système, composé de particules chargées et d'éther, et dont l'état est relié à celui du premier système de la manière suivante:

Si P et P' sont deux points, l'un dans le premier système et l'autre dans le second, et qui sont symétriquement situés de part et d'autre du plan E, on trouvera dans ces points, à tout moment,

a. la même valeur de ϱ;

b. des vitesses (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') qui sont l'image l'une de l'autre;

c. des déplacements diélectriques $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ entre lesquels il y a la même relation;

d. de telles forces magnétiques $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}'$ que la seconde est égale et opposée à l'image de la première.

Le nouveau système qui se trouve ainsi défini, satisfera, aussi bien que le premier système, aux équations (II) — (V).

Pour s'en assurer, on peut rapporter les deux systèmes à des axes des coordonnées de la même direction et supposer que le plan E soit perpendiculaire à l'axe $O\ X$.

Alors, les variables f, g, h, α, β, γ, $\frac{\partial f}{\partial x}$, etc, qui ont toutes la propriété de présenter les mêmes valeurs absolues en P et P', peuvent être rangées en deux groupes, le premier contenant les quantités qui, en P et en P', ont le même signe, et le second étant composé de celles qui y ont des signes contraires. Au premier groupe appartiennent, par exemple, g, h, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, et au second groupe f, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$ et β. On verra facilement, et c'est là le point essentiel, que tous les termes qui sont réunis dans une même équation font partie d'un même groupe. Voilà pourquoi les équations ne cessent pas d'être satisfaites si on passe du point P au point P'.

§ 146. Si, comme il a été dit plus haut, on trouve toujours, en des points correspondants, des valeurs égales de ϱ, cela implique évidemment que les systèmes de particules dont il s'agit dans les deux cas présentent entre eux la relation qui existe entre un objet et son image. Cependant, nous avons seulement démontré que, lorsque le mouvement supposé pour le premier système peut réellement exister, il en sera de même du second mouvement, en tant que ce dernier satisfait aux équations du mouvement de l'éther. Il y faut ajouter la condition que des forces convenablement choisies doivent être appliquées aux particules chargées elles-mêmes.

Or, il résulte des équations (I) (§ 90) que le vecteur qui représente la force exercée par l'éther sur une particule du second système est, à tout moment, l'image de la force qui agit sur la particule correspondante du premier système. En effet, si l'on s'en tient à la direction choisie pour le plan E, on verra facilement que tous les termes dont se compose $\mathfrak{X}$ changent de signe quand on passe du premier au second mouvement, mais que les signes dans les expressions pour $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$ ne changent pas.

§ 147. L'application de ces considérations au problème qui nous occupe est bien simple. Si, dans le premier système, une

particule est animée à la fois d'une vitesse de translation p et d'une vibration dans laquelle le déplacement est $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, la particule correspondante du second système aura une vitesse qui est l'image de p et un écartement qui est celle de $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$. En vertu de notre théorème, on peut affirmer que les forces que les deux particules éprouvent de la part de l'éther sont également symétriques par rapport au plan E.

Dans le cas où ce plan est perpendiculaire à OX, chacune des quantités $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\dot{\mathfrak{y}}$, $\dot{\mathfrak{z}}$, etc. sera, dans les deux systèmes, affectée du même signe, mais le contraire aura lieu pour p, $\mathfrak{x}$, $\dot{\mathfrak{x}}$, etc. Il faut que la composante $\mathfrak{X}$ se trouve dans le dernier cas; l'expression par laquelle elle est représentée ne peut donc contenir aucun des produits $p\,\mathfrak{x}$, $p\,\dot{\mathfrak{x}}$, etc.

En appliquant un raisonnement de la même nature aux composantes $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{Z}$, et en supposant que le plan E soit perpendiculaire à $O\,Y$ ou $O\,Z$, on achèvera de démontrer ce qui a été avancé au paragraphe 144.

Du reste, dans la Note additionnelle, je donnerai un examen plus général de la réaction de l'éther sur une particule vibrante.

§ 148. J'admettrai encore que la force aux composantes

$$-\mathfrak{f}\,\mathfrak{x}, \quad -\mathfrak{f}\,\mathfrak{y}, \quad -\mathfrak{f}\,\mathfrak{z},$$

qui est exercée (§ 121) sur la particule vibrante par les autres particules de la même molécule, est également indépendante de la translation de la matière pondérable. C'est une hypothèse que nous ne saurions justifier, puisque nous regardons comme entièrement inconnu le mécanisme qui produit ces forces intérieures. Tout au plus, on pourrait faire voir que le changement apporté par la translation est de l'ordre $\frac{p^2}{V^2}$ si les forces peuvent être représentées, en deux systèmes correspondants (§ 145), par des vecteurs qui sont l'image l'un de l'autre.

Détermination de la force totale qui agit sur une particule vibrante.

§ 149. En reprenant les questions dont nous nous sommes occupés à partir du paragraphe 122, je commencerai par la force qui est due aux molécules extérieures à la sphère B. Soient, de nouveau, x, y, z les coordonnées du centre, où se trouve la molécule M contenant la particule P et ayant le moment électrique $(\mathbf{m}_x, \mathbf{m}_y, \mathbf{m}_z)$, $D\tau'$ un élément de volume situé au point (x', y', z') extérieur à la sphère, $\mathfrak{r}$ la fonction (139), $\mathbf{M}'_x$, $\mathbf{M}'_y$, $\mathbf{M}'_z$ les composantes du moment électrique rapportées à l'unité de volume et relatives au point (x', y', z') et à l'instant

$$t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}.$$

Cela posé, on aura les valeurs de f, g, h, α, β et γ que l'élément $D\tau'$ seul produit au centre de la sphère, si on remplace, dans les formules (144), (145) et (146), $\mathbf{m}'_x, \mathbf{m}'_y, \mathbf{m}'_z$ par $\mathbf{M}'_x D\tau'$, $\mathbf{M}'_y D\tau'$, $\mathbf{M}'_z D\tau'$ et une intégration sur l'espace extérieur à la sphère nous fera connaître les valeurs de $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ qui sont produites par toutes les molécules de cet espace. Si, dans les coefficients, on écrit V^2 au lieu de $V^2 - p^2$ et $4\pi V^2$ au lieu de L, et si on pose

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathbf{M}'_y}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{M}'_z}{\mathfrak{r}}\right) = S''',$$

on trouve :

$$\left.\begin{aligned}
f &= \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\partial S'''}{\partial x} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{V^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial S'''}{\partial t}\right\}\right] D\tau', \\
g &= \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\partial S'''}{\partial y} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_y}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{\mathbf{M}'_y}{\mathfrak{r}}\right)\right] D\tau', \\
h &= \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{\partial S'''}{\partial z} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_z}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{p}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(\frac{\mathbf{M}'_z}{\mathfrak{r}}\right)\right] D\tau',
\end{aligned}\right\} \quad (147)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \int\left[\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_z}{\mathfrak{r}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_y}{\mathfrak{r}}\right)\right] D\tau', \\ \beta &= \int\left[\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_z}{\mathfrak{r}}\right) - p\,\frac{\partial S'''}{\partial z}\right] D\tau', \\ \gamma &= \int\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_y}{\mathfrak{r}}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\left(\frac{\mathsf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) + p\,\frac{\partial S'''}{\partial y}\right] D\tau'.\end{aligned}\right\} \ldots (148)$$

§ 150. Soit, pour simplifier,

$$\mathfrak{M}_x = \int \frac{\mathsf{M}'_x}{\mathfrak{r}} D\tau', \quad \mathfrak{M}_y = \int \frac{\mathsf{M}'_y}{\mathfrak{r}} D\tau', \quad \mathfrak{M}_z = \int \frac{\mathsf{M}'_z}{\mathfrak{r}} D\tau';$$

ces intégrales, qui se rapportent à l'espace extérieur à la sphère B et dans lesquelles M'_x, M'_y, M'_z sont toujours les valeurs des moments électriques au moment

$$t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}},$$

seront des fonctions de x, y, z et t.

Ecrivons, pour un moment,

$$\mathsf{M}_x = F(t, x, y, z),$$

et, par conséquent,

$$\mathsf{M}'_x = F\left(t - \frac{\mathfrak{r} + \varepsilon(x - x')}{\sqrt{V^2 - p^2}}, x', y', z'\right).$$

L'intégrale $\mathfrak{M}_x$ devient par cela analogue à l'intégrale χ du paragraphe 140 et on trouve

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathsf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau'$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} = -\frac{\mathsf{M}_x}{R}\int (x' - x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) DB + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathsf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau' \ldots (149)$$

Il est vrai que le rayon R de la sphère B n'est pas infiniment petit, comme l'était celui de la sphère b du paragraphe 116, mais il a été supposé si petit qu'on peut, à la surface B, remplacer M'_x par M_x.

En négligeant des termes de l'ordre p^2, on peut, dans la première intégrale, remplacer $\mathfrak{r}$ par la distance r, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x^2} = -\frac{4}{3}\pi \mathbf{M}_x + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau' .$$

Pareillement:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x \partial y} = \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau'$$

etc.

Enfin:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} = \int \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau',$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x \partial t} = \int \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\mathbf{M}'_x}{\mathfrak{r}}\right) D\tau',$$

etc.

§ 151. Ces relations conduisent à écrire, au lieu des expressions (147) et (148),

$$f = \frac{1}{3}\mathbf{M}_x + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} + \frac{p}{V^2}\left\{\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\right\}\right],$$

$$g = \frac{1}{3}\mathbf{M}_y + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial y} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial t^2} + \frac{p}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x \partial t}\right],$$

$$h = \frac{1}{3}\mathbf{M}_z + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial z} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial t^2} + \frac{p}{V^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x \partial t}\right],$$

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial z \partial t},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial x \partial t} - p\frac{\partial \Sigma}{\partial z},$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial y \partial t} + p\frac{\partial \Sigma}{\partial y},$$

où

$$\Sigma = \frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z}.$$

§ 152. Il nous reste à porter ces valeurs dans les équations (I') (§ 133), qu'on peut préalablement simplifier en regardant $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ comme constants à l'intérieur de la particule

P. Les composantes de la force exercée par la partie du diélectrique qui se trouve au dehors de la sphère B deviennent ainsi

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= 4\pi V^2 ef + \frac{d\,\mathfrak{m}_y}{dt}\gamma - \frac{d\,\mathfrak{m}_z}{dt}\beta, \\ \mathbf{Y}_1 &= 4\pi V^2 eg + \frac{d\,\mathfrak{m}_z}{dt}\alpha - \frac{d\,\mathfrak{m}_x}{dt}\gamma - pe\gamma, \\ \mathbf{Z}_1 &= 4\pi V^2 eh + \frac{d\,\mathfrak{m}_x}{dt}\beta - \frac{d\,\mathfrak{m}_y}{dt}\alpha + pe\beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (150)$$

Avant d'effectuer les substitutions (§ 153), j'appellerai l'attention sur l'ordre de grandeur des différents termes. Conformément à ce qui a été dit au paragraphe 125, on a

$$\Sigma\,(=)\,\frac{\mathfrak{M}}{\lambda},\quad \frac{\partial\,\Sigma}{\partial x}\,(=)\,\frac{\mathfrak{M}}{\lambda^2},\quad \frac{\partial^2\,\mathfrak{M}_x}{\partial t^2}\,(=)\,\frac{\mathfrak{M}}{\vartheta^2},\ \text{etc.}$$

De plus:

$$\lambda\,(=)\,V\vartheta.$$

Donc, si on désigne par $f_1 \ldots \gamma_1$ les parties des six fonctions qui ne contiennent pas le facteur p et par $f_2 \ldots\ldots \gamma_2$ celles où il se trouve,

$$f_1\,(=)\,g_1\,(=)\,h_1\,(=)\,\frac{1}{3}\,\mathbf{M} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathfrak{M}}{V^2\vartheta^2},$$

$$f_2\,(=)\,g_2\,(=)\,h_2\,(=)\,\frac{p}{4\pi V^2}\,\frac{\mathfrak{M}}{V\vartheta^2},$$

$$\alpha_1\,(=)\,\beta_1\,(=)\,\gamma_1\,(=)\,\frac{\mathfrak{M}}{V\vartheta^2},$$

$$\beta_2\,(=)\,\gamma_2\,(=)\,p\,\frac{\mathfrak{M}}{V^2\,\vartheta^2}.$$

Passons rapidement en revue les termes qui paraissent dans les expressions pour $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Z}_1$.

a. Les produits $4\pi V^2 e f_1$, $4\pi V^2 e g_1$ et $4\pi V^2 e h_1$ contiennent des parties qui sont du même ordre de grandeur que $\frac{e\,\mathfrak{M}}{\vartheta^2}$.

b. Comme

$$\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{dt}\,(=)\,\frac{e\,\delta}{\vartheta},$$

les termes de la forme

$$\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{d\,t}\,\gamma_1$$

sont comparables à

$$\frac{e\,\delta\,\mathfrak{M}}{V\,\vartheta^3};$$

ils peuvent donc être négligés en présence des produits précités, et cela parce que l'amplitude δ est beaucoup plus petite que la longueur d'onde $\vartheta\,V$.

c. Les expressions $4\,\pi\,V^2\,e\,f_2$, etc. sont de l'ordre:

$$\frac{p\,e\,\mathfrak{M}}{V\,\vartheta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

Ces termes devront être conservés, parce que ce sont eux qui détermineront l'influence de la translation du diélectrique.

d. Au contraire, on peut omettre toutes les quantités de la forme

$$\frac{d\,\mathfrak{m}_y}{d\,t}\,\gamma_2\,;$$

en effet, on obtient une idée de leur grandeur au moyen de l'expression

$$\frac{p\,e\,\delta\,\mathfrak{M}}{V^2\,\vartheta^3},$$

qui est très petite en comparaison de la fraction (151).

e. Les termes $p\,e\,\gamma_1$ et $p\,e\,\beta_1$ doivent être retenus, parce qu'ils sont de l'ordre

$$\frac{p\,e\,\mathfrak{M}}{V\,\vartheta^2}$$

et, par suite, comparables aux termes que nous avons nommés en troisième lieu.

f. Enfin, on peut naturellement négliger

$$p\,e\,\gamma_2 \text{ et } p\,e\,\beta_2,$$

ces produits étant proportionnels à p^2.

§ 153. Voici maintenant le résultat final des substitutions:

$$\mathbf{X}_1 = e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_x + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} + p\left\{\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\right\}\right],$$

$$\mathbf{Y}_1 = e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_y + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial y \partial t}\right],$$

$$\mathbf{Z}_1 = e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_z + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial t^2} + p\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial z \partial t}\right].$$

Il importe de signaler l'origine différente des deux termes $4\pi V^2 e g_2$ et $-p e \gamma_1$ qui, par leur combinaison, ont produit le terme $p e \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial y \partial t}$. Le premier provient de ce que le déplacement diélectrique qui est excité par les particules vibrantes est modifié par la translation p. Le second est simplement la force que la particule e subit en vertu de son mouvement, avec la vitesse p, à travers le champ magnétique que les vibrations ont fait naître. Des remarques analogues s'appliquent au terme $p e \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial z \partial t}$ dans l'expression pour $\mathbf{Z}_1$.

§ 154. Représentons, comme au paragraphe 126, par

$$f_0, g_0, h_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$$

les composantes du déplacement diélectrique et de la force magnétique qui sont produits par des causes extérieures au corps considéré. A ces composantes correspondra une force, agissant sur la particule P et ayant, d'après les formules (I'), les composantes

$$4\pi V^2 e f_0,\ 4\pi V^2 e g_0 - p e \gamma_0,\ 4\pi V^2 e h_0 + p e \beta_0 \ldots \quad (152)$$

Pour la raison qui a été alléguée au paragraphe 126, nous avons omis ici les termes de la forme

$$\frac{d\,\mathbf{m}_y}{dt}\gamma_0.$$

§ 155. Pour compléter cet examen de la force qui agit sur une particule vibrante, nous avons encore à étudier l'action des molécules qui sont incluses dans la sphère B. Les composantes de cette force seront de nouveau indiquées par $e\mathfrak{X}'$,

$e\,\mathfrak{Y}'$, $e\,\mathfrak{Z}'$; leurs valeurs moyennes, les seules dont nous aurons besoin, seront déterminées — du moins dans un diélectrique donné — dès que l'on connaît pour chaque instant les valeurs de $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ au point considéré (x, y, z). En effet, la sphère B est très petite par rapport à la longueur d'onde; on peut donc faire abstraction du changement que subissent $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ quand on passe d'un point à l'autre.

C'est ainsi que, pour un milieu immobile, on pourrait écrire (§§ 127 et 106):

$$e\,\overline{\mathfrak{X}'} = A\,\mathbf{M}_x,\ e\,\overline{\mathfrak{Y}'} = A\,\mathbf{M}_y,\ e\,\overline{\mathfrak{Z}'} = A\,\mathbf{M}_z, \quad \ldots\ldots \quad (153)$$

A étant une constante, dont la valeur n'aura du reste aucune importance pour ce qui suivra.

Quelle est maintenant l'influence de la translation imprimée au diélectrique? Elle pourra donner lieu à des termes qu'il faut ajouter aux composantes (153), et qui forment des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la vitesse p. Nous nous bornerons aux termes du premier degré.

Un coup d'œil sur les formules (I'), (145) et (146) suffit pour comprendre que tous les termes dont il s'agit doivent être des fonctions linéaires de $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$, $\frac{\partial\,\mathbf{M}_x}{\partial\,t}$, etc. Si donc nous désignons par $(\mathbf{M}_x)$ une fonction linéaire de $\mathbf{M}_x$, $\frac{\partial\,\mathbf{M}_x}{\partial\,t}$, etc., en attachant un sens analogue aux signes $(\mathbf{M}_y)$ et $(\mathbf{M}_z)$, on aura, au lieu des composantes (153):

$$\left.\begin{aligned} e\,\overline{\mathfrak{X}'} &= A\,\mathbf{M}_x + p\,\{(\mathbf{M}_x)_1 + (\mathbf{M}_y)_1 + (\mathbf{M}_z)_1\}, \\ e\,\overline{\mathfrak{Y}'} &= A\,\mathbf{M}_y + p\,\{(\mathbf{M}_x)_2 + (\mathbf{M}_y)_2 + (\mathbf{M}_z)_2\}, \\ e\,\overline{\mathfrak{Z}'} &= A\,\mathbf{M}_z + p\,\{(\mathbf{M}_x)_3 + (\mathbf{M}_y)_3 + (\mathbf{M}_z)_3\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (154)$$

Or, dans le cas d'un diélectrique homogène et isotrope, tous les termes en p doivent s'annuler. C'est ce que nous démontrerons dans les deux paragraphes suivants; après cela, nous reviendrons à l'étude du mouvement des particules (§ 158).

§ 156. Pour arriver à la simplification que je viens d'indiquer, on peut se servir d'un raisonnement analogue à celui qu'on trouve dans les paragraphes 145 et 146. Après avoir choisi un plan fixe E, on peut concevoir un système N' qui soit à tout moment l'image exacte du diélectrique considéré N, et cela, non seulement en ce qui concerne l'état de l'éther et la distribution des particules chargées, mais aussi en ce qui regarde les autres parties constituantes de la matière pondérable; en effet, nous nous figurerons qu'à chaque point matériel du premier système corresponde, dans le second, un point qui est doué des mêmes propriétés. Nous avons déja vu que le nouveau mouvement est compatible avec les équations (II) — (V). Ajoutons maintenant que, si le premier système satisfait aux équations qui déterminent le déplacement des particules chargées, il en sera de même du second corps. La raison en est que non seulement les vecteurs qui, dans les deux corps, représentent les accélérations des particules, mais aussi ceux qui indiquent les forces, s'accordent entre eux comme des objets et des images correspondantes. C'est ce qui a été démontré au paragraphe 146 pour les forces qui sont exercées par l'éther; et il est naturel d'admettre la même chose pour celles qui sont en jeu à l'intérieur de molécules correspondantes.

§ 157. Un corps amorphe et parfaitement isotrope est tellement constitué qu'il possède les mêmes propriétés qu'un corps qui en serait l'image; du moins, il en sera ainsi tant qu'on se borne aux phénomènes dépendant d'un grand nombre de molécules. On pourra donc prendre pour N' un corps qui est absolument identique à N et qui est orienté de la même manière, et non pas en sens inverse; dans ces deux corps, il pourra toujours exister des mouvements qui sont l'image l'un de l'autre en ce qui regarde $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ et les forces moyennes agissant sur les particules.

Je rapporterai les corps N et N' à un même système de coordonnées, et je supposerai, en premier lieu, que le plan E

soit perpendiculaire à l'axe des x. Alors, les quantités $\mathbf{M}_y$ et $\mathbf{M}_z$ auront, en deux points correspondants, les mêmes valeurs et les mêmes signes, mais $\mathbf{M}_x$ et p (la translation étant toujours dirigée suivant $O\,X$ dans le premier corps) auront, à valeurs égales, des signes contraires. D'un autre côté, les forces $e\mathfrak{X}'$, $e\mathfrak{Y}'$, $e\mathfrak{Z}'$ auront, dans les deux corps, les mêmes valeurs absolues, mais ce ne sont que les deux dernières qui auront également, en N et N', les mêmes signes.

Comme, du reste, les coefficients dans les fonctions linéaires $(\mathbf{M}_x)_1$, etc. seront les mêmes dans les deux cas, il faut que le terme $p\,(\mathbf{M}_x)_1$ s'annule; en effet, ce terme aurait, dans les deux corps, le même signe. Les termes $p\,(\mathbf{M}_y)_2$, $p\,(\mathbf{M}_z)_2$, $p\,(\mathbf{M}_y)_3$, $p\,(\mathbf{M}_z)_3$ doivent s'annuler pour une raison semblable, et, en considérant l'image du mouvement par rapport à des plans perpendiculaires à $O\,Y$ et $O\,Z$, on démontre la même chose pour les termes $p\,(\mathbf{M}_y)_1$, $p\,(\mathbf{M}_z)_1$, $p\,(\mathbf{M}_x)_2$, $p\,(\mathbf{M}_x)_3$. On peut donc toujours se servir des équations (153).

Équations du mouvement d'une particule.

§ 158. En rassemblant les données dispersées dans les paragraphes 144, 148, 153, 154 et 155, on voit que la formule (121) et les deux autres que nous aurions pu lui ajouter doivent être remplacées par

$$\left.\begin{aligned}
m\dot{\xi} &= -\mathfrak{f}\,\mathrm{x} + 4\pi V^2 \dot{\xi}\int \varrho_0 \omega\, d\tau + \frac{e^2}{V}\ddot{\xi} + e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_x + \right.\\
&\quad \left. + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial t^2} + p\left\{\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}\right\}\right] + 4\pi V^2 e f_0 + e\mathfrak{X}',\\
m\dot{\eta} &= -\mathfrak{f}\,\mathrm{y} + 4\pi V^2 \dot{\eta}\int \varrho_0 \omega\, d\tau + \frac{e^2}{V}\ddot{\eta} + e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_y + \right.\\
&\quad \left. + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_y}{\partial t^2} + p\,\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial y\, \partial t}\right] + 4\pi V^2 e g_0 - p e \gamma_0 + e\mathfrak{Y}',\\
m\dot{\zeta} &= -\mathfrak{f}\,\mathrm{z} + 4\pi V^2 \dot{\zeta}\int \varrho_0 \omega\, d\tau + \frac{e^2}{V}\ddot{\zeta} + e\left[\frac{4}{3}\pi V^2 \mathbf{M}_z + \right.\\
&\quad \left. + V^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}_z}{\partial t^2} + p\,\frac{\partial^2 \mathfrak{M}_x}{\partial z\, \partial t}\right] + 4\pi V^2 e h_0 + p e \beta_0 + e\mathfrak{Z}'.
\end{aligned}\right\} \quad (155)$$

Je ferai subir à ces formules les changements qui ont été indiqués au paragraphe 128 — en divisant cependant par e et non pas par $e\,V$ — et, pour abréger, je réunirai en un seul terme tout ce qui résulte de chacun des trois groupes

$$-m\ddot{\xi}-\mathfrak{f}\,\mathrm{x}+4\pi V^2\dot{\xi}\int\varrho_0\,\omega\,d\tau+e\mathfrak{X}'+\frac{4}{3}\pi V^2 e\,\mathbf{M}_x,\ \text{etc.}$$

En ayant égard aux formules (153), on trouve pour ces trois groupes

$$\left(\frac{4}{3}\pi V^2+\frac{A\,N\,e-\mathfrak{f}}{N\,e^2}\right)\mathbf{M}_x-\frac{\varkappa}{N\,e^2}\frac{\partial^2\mathbf{M}_x}{\partial t^2},\ \text{etc.}$$

Je me bornerai à des vibrations simples de la période ϑ. Dans ce cas:

$$\frac{\partial^2\mathbf{M}_x}{\partial t^2}=-\frac{4\pi^2}{\vartheta^2}\mathbf{M}_x,\ \text{etc.}$$

Donc, si on pose

$$\frac{\frac{4}{3}\pi V^2 N e^2+A\,N\,e-\mathfrak{f}+\frac{4\pi^2\varkappa}{\vartheta^2}}{N\,e^2}=4\pi Q,$$

les trois groupes deviennent

$$4\pi Q\,\mathbf{M}_x,\ 4\pi Q\,\mathbf{M}_y,\ 4\pi Q\,\mathbf{M}_z.$$

Il n'est pas nécessaire de nous occuper de la valeur de Q; il nous suffit que pour un corps et une durée de vibration donnés, cette quantité est une constante, indépendante de la vitesse p.

En somme, les équations (155) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned}
&4\pi Q\,\mathbf{M}_x+V^2\frac{\partial\Sigma}{\partial x}-\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial t^2}+p\left(\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\Sigma}{\partial t}\right)+4\pi V^2 f_0=0,\\
&4\pi Q\,\mathbf{M}_y+V^2\frac{\partial\Sigma}{\partial y}-\frac{\partial^2\mathfrak{M}_y}{\partial t^2}+p\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial y\,\partial t}+4\pi V^2 g_0-p\gamma_0=0,\\
&4\pi Q\,\mathbf{M}_z+V^2\frac{\partial\Sigma}{\partial z}-\frac{\partial^2\mathfrak{M}_z}{\partial t^2}+p\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial z\,\partial t}+4\pi V^2 h_0+p\beta_0=0.
\end{aligned}\right\}\quad(156)$$

Équations différentielles qui déterminent $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$.

§ 159. Dans le chapitre précédent, nous sommes parvenus à ces équations en soumettant la formule (122) à l'opération

$$\Delta - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Maintenant que les équations (156) se rapportent aux axes *mobiles* OX, OY, OZ, c'est l'opération

$$\Box = V^2 \Delta - \left(\frac{\partial}{\partial t} - p\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

qu'il leur faut appliquer.

On fait disparaître ainsi $f_0, g_0, h_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$, parce que

$$\Box f_0 = 0, \quad \Box \alpha_0 = 0, \text{ etc.}$$

Comme, de plus (§ 150),

$$\Box \mathfrak{M}_x = -4\pi \mathbf{M}_x, \quad \Box \mathfrak{M}_y = -4\pi \mathbf{M}_y, \quad \Box \mathfrak{M}_z = -4\pi \mathbf{M}_z,$$

il vient

$$Q \Box \mathbf{M}_x - V^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial t^2} - p\left\{\frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right\} = 0,$$

$$Q \Box \mathbf{M}_y - V^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial t^2} - p\frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial y \partial t} = 0,$$

$$Q \Box \mathbf{M}_z - V^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_z}{\partial t^2} - p\frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial z \partial t} = 0,$$

où nous avons posé

$$\Gamma = \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial z}.$$

Entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable.

§ 160. Concevons d'abord des ondes planes qui se propagent dans la direction de OX. Les moments électriques sont alors indépendants de y et de z et on peut satisfaire aux équations

en supposant qu'ils ont partout la direction de $O\ Y$. En effet, en posant $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_z = 0$ et en supposant $\mathbf{M}_y$ indépendant de y et de z, on satisfait à la première et à la troisième des équations; la deuxième se réduit à

$$Q \square \mathbf{M}_y + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial t^2} = 0,$$

ou bien, si on néglige toujours les termes en p^2, à

$$V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial x^2} + 2\, p \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial x \partial t} - Q' \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial t^2} = 0,$$

où

$$Q' = 1 - \frac{1}{Q}.$$

La fonction

$$\mathbf{M}_y = C \cos \frac{2\pi}{\vartheta} \left(t - \frac{x}{W}\right)$$

satisfait à cette équation, si

$$\frac{V^2}{W^2} - \frac{2p}{W} - Q' = 0,$$

d'où l'on déduit pour la vitesse de propagation, en négligeant de nouveau les termes en p^2,

$$W = \pm \frac{V}{\sqrt{Q'}} - \frac{p}{Q'} \dots\dots\dots\dots (157)$$

Pour $p = 0$, cette valeur devient

$$\pm \frac{V}{\sqrt{Q'}};$$

la vitesse W_0, dans le cas où le diélectrique se trouve en repos, est par conséquent donnée par

$$W_0 = \frac{V}{\sqrt{Q'}}$$

et $\sqrt{Q'}$ n'est autre chose que l'indice de réfraction ν. La formule (157) devient par cela:

$$W = \pm W_0 - \frac{p}{\nu^2}.$$

C'est la vitesse de propagation par rapport à la matière pondérable. Pour obtenir celle du mouvement relatif des ondes lumineuses par rapport à l'éther, il y faut ajouter la vitesse p. On obtient ainsi:

$$\pm W_0 + \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) p.$$

Quel que soit le sens dans lequel les ondes se propagent — c'est-à-dire quel que soit le signe qui précède W_0 — on voit que le mouvement de la matière pondérable avec la vitesse p imprime toujours aux ondes une vitesse qui est une fraction déterminée de p. Le facteur

$$1 - \frac{1}{\nu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

est précisément le coefficient d'entraînement que *Fresnel* a introduit dans la théorie de l'aberration et qui peut servir à rendre compte des expériences de M. *Fizeau* [1]), répétées dans ces dernières années par M M. *Michelson* et *Morley* [2]), sur la propagation de la lumière dans une colonne liquide qui se déplace.

Remarquons encore que, d'après notre théorie, la valeur (158) est applicable à chaque espèce de lumière homogène, si seulement on entend par ν l'indice de réfraction qui lui est propre [3]).

§ 161. Lorsque la direction de propagation des ondes est perpendiculaire à celle dans laquelle se déplace le milieu, il faut distinguer deux cas principaux. Dans le premier, les vibrations électriques sont normales au plan qui contient les deux directions indiquées; dans le second cas, elles sont parallèles à ce plan.

---

[1]) *Comptes rendus*. T. 83, p. 349; Pogg. *Ann.*, Erg. 3, p. 457.

[2]) *American Journal of Science*, 3d Ser., Vol. 31, p. 377.

[3]) Dans un Mémoire qui parut en 1880 (*Phil. Mag.* 5th Ser., Vol. 9, p. 284). M. *J. J. Thomson* s'est occupé de la propagation de la lumière dans un diélectrique qui se déplace. Cependant, dans cette étude, il n'est aucunement question de la perméabilité pour l'éther et, suivant l'auteur, le coefficient d'entraînement aurait toujours la valeur $\frac{1}{2}$.

a. Le premier cas se présente si $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_y = 0$ et

$$\mathbf{M}_z = C \cos \frac{2\pi}{\vartheta}\left(t - \frac{y}{W}\right).$$

Les trois équations se réduisent à:

$$Q \,\square\, \mathbf{M}_z + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_z}{\partial t^2} = 0,$$

mais l'opération $\square$ équivaut maintenant à

$$V^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

L'équation ne contient donc plus p et la vitesse W devient indépendante du mouvement du milieu.

b. Dans le second cas, les vibrations ne peuvent plus être rigoureusement transversales; elles feront avec la direction de propagation un angle dont le complément est de l'ordre $\frac{p}{V}$. Cependant, la vitesse de propagation reste

$$W_0 = \frac{V}{\sqrt{Q}}.$$

En effet, on peut satisfaire aux équations du mouvement par les valeurs:

$$\mathbf{M}_x = C \cos \frac{2\pi}{\vartheta}\left(t - \frac{y}{W_0}\right),$$

$$\mathbf{M}_y = -\frac{p\,W_0}{V^2} C \cos \frac{2\pi}{\vartheta}\left(t - \frac{y}{W_0}\right),$$

$$\mathbf{M}_z = 0.$$

Il est facile d'étendre ces résultats à une direction de propagation quelconque.

NOTE ADDITIONNELLE.

Pour simplifier autant que possible les considérations qu'on vient de lire, je me suis borné au cas où l'amplitude des particules vibrantes est plus petite que leur diamètre. Je vais démontrer maintenant que les résultats obtenus subsistent encore lorsque les excursions sont beaucoup plus considérables. C'est le théorème du paragraphe 141 qui nous permettra d'arriver à cette théorie plus générale.

Valeurs générales de f, g, h, α, β, γ.

1. Reprenons d'abord le problème d'une seule particule mobile (§ 135). Les composantes du déplacement diélectrique et de la force magnétique qu'elle produit dans l'éther satisferont partout aux conditions (128) et (129), les derniers membres étant des fonctions connues de x, y, z et t, si on regarde comme donné le mouvement de la particule.

Représentons par

$$\mathfrak{F}(t, x, y, z), \quad \mathfrak{G}(t, x, y, z), \quad \mathfrak{H}(t, x, y, z),$$
$$\mathfrak{A}(t, x, y, z), \quad \mathfrak{B}(t, x, y, z), \quad \mathfrak{C}(t, x, y, z)$$

ces fonctions, qui, du reste, sont 0 dans tous les points que le corpuscule n'atteint pas.

Alors, on satisfait aux équations (128) et (129) par les valeurs :

$$f = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{F}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau', \quad g = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{G}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau',$$
$$h = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{H}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau', \quad \ldots \quad (159)$$

$$\alpha = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{A}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau', \quad \beta = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{B}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau',$$
$$\gamma = -\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{C}(t-\varkappa, x', y', z')\,d\tau', \quad \ldots \quad (160)$$

où

$$\mathfrak{r}=\sqrt{\frac{V^2}{V^2-p^2}(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\,,$$

$$\varkappa=\frac{\mathfrak{r}+\varepsilon(x-x')}{\sqrt{V^2-p^2}}=\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{V^2-p^2}}+\frac{p(x-x')}{V^2-p^2}$$

et

$$L=4\pi V\sqrt{V^2-p^2}.$$

Rappelons encore que, dans les formules (159) et (160), et dans celles qui vont suivre, le signe $\int$ a toujours la signification de $\operatorname{Lim}\int_{\mathrm{r}}$ (§ 116).

Avant d'employer les valeurs trouvées, il est nécessaire d'examiner si elles satisfont aux équations primitives (II')—(V') (§ 133). Je n'écrirai pas au long toutes ces vérifications; je me contenterai de faire voir que

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\varrho.$$

Vérification de la formule (II').

2. Si la fonction U dont il fut question au paragraphe 116 devient 0 à la surface σ, la formule (103) se réduit à

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\int_{\mathrm{r}}\frac{\partial U}{\partial x'}d\tau'+\int_{\mathrm{r}}\frac{\partial U}{\partial x}d\tau',$$

ce qui restera vrai à la limite, pour $\mathrm{r}=0$. D'autre part, il est clair que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{F}(t-\varkappa,x',y',z')\right\}=\left[\frac{\partial}{\partial x'}\right]\left\{\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{F}(t-\varkappa,x',y',z')\right\},$$

si par le signe $\left[\frac{\partial}{\partial x'}\right]$ on indique une différentiation dans laquelle $\mathfrak{r}$ et $\varkappa$ sont regardés comme constants.

De ces formules on déduit

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\right]\mathfrak{F}(t-\varkappa,x',y',z')\,d\tau',$$

avec des expressions analogues pour $\frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial h}{\partial z}$.

Posons :

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(t,x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{G}(t,x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{H}(t,x,y,z)}{\partial z}=\Pi(t,x,y,z).$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=-\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\,\Pi\,(t-\varkappa,x',y',z')\,d\tau' \quad \ldots \quad (161)$$

En se rappelant que, dans les formules (128), x, y, z sont les coordonnées d'un point immobile par rapport aux axes et que, par conséquent,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}=-\left(\xi\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\eta\frac{\partial \varrho}{\partial y}+\zeta\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right),$$

on trouvera

$$\Pi(t,x,y,z)=(V^2-p^2)\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+V^2\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)+$$
$$+2p\frac{\partial^2\varrho}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2\varrho}{\partial t^2}.$$

Soit

$$\varrho=\vartheta\,(t,x,y,z);$$

alors :

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\,\Pi\,(t-\varkappa,x',y',z')=\frac{1}{\mathfrak{r}}\left\{(V^2-p^2)\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]+V^2\left[\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right]+\right.$$
$$\left.+V^2\left[\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right]+2p\left[\frac{\partial}{\partial x'}\right]\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}\vartheta\,(t-\varkappa,x',y',z'),$$

où les crochets signifient la même chose que ci-dessus.

Mais, en écrivant ϑ au lieu de $\vartheta\,(t-\varkappa,\ x',y',z')$, on a

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x'}=-\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial\varkappa}{\partial x'}+\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial x'}\right],\ \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x'^2}=-\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial^2\varkappa}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial x'}\right)^2-2\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial x'}\right]\frac{\partial\varkappa}{dx'}+$$
$$+\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x'^2}\right],\ \text{etc.}$$

Au moyen de ces relations on peut éliminer les dérivées:

$$\left[\frac{\partial \vartheta}{\partial x'}\right], \quad \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x'^2}\right], \text{ etc.,}$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\Pi(t-\varkappa, x', y', z') = \frac{1}{\mathfrak{r}}\left[(V^2-p^2)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x'^2} + V^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y'^2} + V^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{r}}\left[(V^2-p^2)\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial x'}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial y'}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial \varkappa}{\partial z'}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2p\frac{\partial \varkappa}{\partial x'} - 1\right]\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} +$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{r}}\left[(V^2-p^2)\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x'^2} + V^2\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial y'^2} + V^2\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial z'^2}\right]\frac{\partial \vartheta}{\partial t} +$$

$$+\frac{2}{\mathfrak{r}}\left[\left\{(V^2-p^2)\frac{\partial \varkappa}{\partial x'} + p\right\}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x' \partial t} + V^2\frac{\partial \varkappa}{\partial y'}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y' \partial t} + V^2\frac{\partial \varkappa}{\partial z'}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z' \partial t}\right].$$

En ayant égard aux valeurs de $\varkappa$ et de $\mathfrak{r}$, on démontre que le terme en $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}$ s'évanouit et que les termes qui suivent peuvent être mis sous la forme:

$$2\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{(V^2-p^2)\frac{\partial \varkappa}{\partial x'} + p}{\mathfrak{r}}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial y'}\left\{\frac{V^2\frac{\partial \varkappa}{\partial y'}}{\mathfrak{r}}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z'}\left\{\frac{V^2\frac{\partial \varkappa}{\partial z'}}{\mathfrak{r}}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right\}\right].$$

Dans la formule (161), cette expression donne lieu à des termes dans lesquels l'intégration par rapport à l'une des variables x', y', z' peut être effectuée. Le résultat est la limite, pour Lim r $= 0$ (§ 116), de l'intégrale suivante, étendue à la surface sphérique b:

$$\frac{2}{L}\int \frac{1}{r\mathfrak{r}}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\left\{(V^2-p^2)(x'-x)\frac{\partial \varkappa}{\partial x'} + V^2(y'-y)\frac{\partial \varkappa}{\partial y'} + \right.$$

$$\left. + V^2(z'-z)\frac{\partial \varkappa}{\partial z'} + p(x'-x)\right\} d\,b.$$

On voit facilement que cette limite est 0 et que, par conséquent, l'équation (161) devient

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=-\frac{1}{L}\int\frac{1}{\mathfrak{r}}\left[(V^2-p^2)\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x'^2}+V^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y'^2}+\right.$$
$$\left.+V^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z'^2}\right]d\tau'.$$

3. La dernière formule devient, par une intégration partielle réitérée,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=-\frac{1}{L}\int\vartheta\left[(V^2-p^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+\right.$$
$$\left.+V^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+V^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right]d\tau'+$$
$$+\frac{1}{L}\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}}\int\left\{(V^2-p^2)\frac{x'-x}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\vartheta}{\partial x'}+V^2\frac{y'-y}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\vartheta}{\partial y'}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+V^2\frac{z'-z}{\mathfrak{r}}\frac{\partial\vartheta}{\partial z'}\right\}db\right]-$$
$$-\frac{1}{L}\operatorname{Lim}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}}\int\vartheta\left\{(V^2-p^2)(x'-x)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+V^2(y'-y)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+V^2(z'-z)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right\}db\right].$$

Le deuxième terme est 0 et dans le troisième on peut remplacer

$$\vartheta(t-\varkappa,\ x',\ y',\ z')$$

par la valeur de cette fonction pour $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, c'est-à-dire, par

$$\vartheta(t,\ x,\ y,\ z)\ \text{ou}\ \varrho.$$

Ce terme devient ainsi:

$$\frac{V^2\varrho}{L}\operatorname{Lim}\left[\mathfrak{r}\int\frac{db}{\mathfrak{r}^3}\right]=\frac{V^2\varrho}{L}\cdot4\pi\frac{\sqrt{V^2-p^2}}{V}=\varrho.$$

D'un autre côté:

$$(V^2-p^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+V^2\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)+V^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)=0;$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\varrho,\ C.\,Q.\,F.\,D.$$

Déplacement diélectrique et force magnétique qu'une particule vibrante produit à quelque distance.

4. Prenons pour origine le point où se trouve le centre de la particule lorsqu'elle occupe sa position naturelle. Alors, les valeurs de x', y', z' pour lesquelles les fonctions:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{F}(t - \varkappa, x', y', z'), \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (162)$$

diffèrent de 0, seront très petites par rapport à la longueur d'onde. Elles le seront également par rapport à x, y, z et $\mathfrak{r}$, si le point (x, y, z) pour lequel on veut calculer $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ est situé dans une autre molécule, même lorsque celle-ci est une des plus voisines.

Cela posé, on peut développer les fonctions (159) et (160) en séries rapidement convergentes. Soient $\mathfrak{r}_0$ et $\varkappa_0$ les valeurs qui correspondent à $x' = y' = z' = 0$, et désignons par $\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\right\}$, etc. des différentiations dans lesquelles on regarde comme constants les x', y', z' qui entrent explicitement dans ces fonctions et comme variables seulement $\mathfrak{r}$ et $\varkappa$. Alors:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{F}(t - \varkappa, x', y', z') = \frac{1}{\mathfrak{r}_0} \mathfrak{F}(t - \varkappa_0, x', y', z') +$$
$$+ x' \left\{\frac{\partial}{\partial x'}\right\} \left[\frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{F}(t - \varkappa, x', y', z')\right] +$$
$$+ y' \left\{\frac{\partial}{\partial y'}\right\} \left[\frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{F}(t - \varkappa, x', y', z')\right] + \text{ etc.}$$

En effectuant les différentiations indiquées dans le second membre, on est conduit à des expressions contenant des dérivées de $\frac{1}{\mathfrak{r}} \mathfrak{F}(t - \varkappa, x', y', z')$ par rapport à $\mathfrak{r}$ et à $\varkappa$, multipliées par des dérivées de $\mathfrak{r}$ et de $\varkappa$ par rapport à x', y', z'. Dans les dérivées de la première espèce, on remplacera $\mathfrak{r}$ et $\varkappa$ par $\mathfrak{r}_0$ et $\varkappa_0$; dans celles de la seconde espèce, on substituera en outre $x' = y' = z' = 0$.

Or, tout cela peut être exprimé bien plus simplement. En effet, pour les fonctions dont il s'agit ici,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}, \left\{\frac{\partial}{\partial y'}\right\} = -\frac{\partial}{\partial y}, \left\{\frac{\partial}{\partial z'}\right\} = -\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ etc.}$$

et, lorsqu'il est question des dérivées par rapport à x, y, z, la substitution de $\mathfrak{r}_0$ et $\varkappa_0$ pour $\mathfrak{r}$ et $\varkappa$ peut avoir lieu *avant* la différentiation.

Donc:

$$\frac{1}{\mathfrak{r}}\mathfrak{F}(t-\varkappa, x', y', z') = \frac{1}{\mathfrak{r}_0}\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z') -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x'}{\mathfrak{r}_0}\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z')\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y'}{\mathfrak{r}_0}\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z')\right] -$$
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z'}{\mathfrak{r}_0}\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z')\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{x'^2}{\mathfrak{r}_0}\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z')\right] + \text{etc.} \quad \ldots\ldots (163)$$

et, d'après les formules (159) et (160),

$$f = -\frac{1}{L}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int\mathfrak{F}\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int x'\,\mathfrak{F}\,d\tau'\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int y'\,\mathfrak{F}\,d\tau'\right] -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int z'\,\mathfrak{F}\,d\tau'\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int x'^2\,\mathfrak{F}\,d\tau'\right] + \ldots\right), \text{etc} \quad (164)$$

$$\alpha = -\frac{1}{L}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int\mathfrak{A}\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int x'\,\mathfrak{A}\,d\tau'\right] + \ldots\right), \text{ etc.} \quad (165)$$

où, pour abréger, on a écrit $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ au lieu de

$\mathfrak{F}(t-\varkappa_0, x', y', z')$, $\mathfrak{G}(t-\varkappa_0, x', y', z')$, etc. . . . . (166)

5. Si on entend par ϱ la densité de la charge qui existe, au moment t, dans le point (x', y', z'), et par (ξ, η, ζ) la vitesse dont la particule est animée à ce même instant, on aura:

$$\mathfrak{F}(t, x', y', z') = \left[V^2 - (\xi + p)^2\right] \frac{\partial \varrho}{\partial x'} - (\xi + p)\,\eta \frac{\partial \varrho}{\partial y'} -$$

$$- (\xi + p)\,\zeta \frac{\partial \varrho}{\partial z'} + \varrho \frac{d\xi}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (167)$$

La même expression peut être prise pour la première des fonctions (166), pourvu seulement qu'on prenne pour ϱ, ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$ les valeurs relatives au temps $t - \varkappa_0$. Recherchons ce qui en résulte pour les intégrales de la formule (164).

a. Valeur de $\int \mathfrak{F}\, d\tau'$.

On a évidemment:

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial x'}\, d\tau' = 0, \int \frac{\partial \varrho}{\partial y'}\, d\tau' = 0, \int \frac{\partial \varrho}{\partial z'}\, d\tau' = 0,$$

et cela parce que la densité ϱ est une fonction continue des coordonnées qui s'évanouit aux confins du champ d'intégration [1]). D'un autre côté:

$$\int \varrho\, d\tau' = e.$$

Si donc on entend par ($\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$) le moment électrique, à l'instant $t - \varkappa_0$, de la molécule dont la particule vibrante fait partie, on aura

$$\int \mathfrak{F}\, d\tau' = e \frac{d\xi}{dt} = \frac{d^2 \mathfrak{m}_x}{dt^2}$$

et

$$\frac{1}{\mathfrak{r}_0} \int \mathfrak{F}\, d\tau' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}_0}\right).$$

b. Valeurs de $\int x' \mathfrak{F}\, d\tau'$, $\int y' \mathfrak{F}\, d\tau'$, $\int z' \mathfrak{F}\, d\tau'$.

En intégrant par parties, on trouve

[1]) Ce champ sera limité par une surface fixe quelconque enveloppant la particule oscillante.

$$\int x' \frac{\partial \varrho}{\partial x'} d\tau' = -\int \varrho \, d\tau' = -e.$$

De plus, on aura

$$\int x' \frac{\partial \varrho}{\partial y'} d\tau' = \int x' \frac{\partial \varrho}{\partial z'} d\tau' = 0$$

et, x étant la première coordonnée du centre,

$$\int x' \varrho \, d\tau' = \mathrm{x} \int \varrho \, d\tau' = e\mathrm{x}.$$

Vu, cependant, que nous avons pris pour origine des coordonnées la position naturelle du centre, on peut écrire

$$\int x' \varrho \, d\tau' = \mathfrak{m}_x;$$

donc

$$\int x' \mathfrak{F} \, d\tau' = -e \left[V^2 - (\xi + p)^2 \right] + \mathfrak{m}_x \frac{d\xi}{dt}.$$

Pareillement

$$\int y' \mathfrak{F} \, d\tau' = e(\xi + p)\eta + \mathfrak{m}_y \frac{d\xi}{dt},$$

$$\int z' \mathfrak{F} \, d\tau' = e(\xi + p)\zeta + \mathfrak{m}_z \frac{d\xi}{dt}.$$

c. Valeurs de $\int x'^2 \mathfrak{F} \, d\tau'$, etc.

Dans le calcul de ces intégrales nous nous servirons des formules

$$\int x'^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x'} d\tau' = -2 \int x' \varrho \, d\tau' = -2\, \mathfrak{m}_x,$$

$$\int x'^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y'} d\tau' = \int x'^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z'} d\tau' = 0,$$

$$\int x' y' \frac{\partial \varrho}{\partial x'} d\tau' = -\int y' \varrho \, d\tau' = -\mathfrak{m}_y, \text{ etc.}$$

Le terme principal $(V^2 - p^2) \frac{\partial \varrho}{\partial x'}$ de l'expression (167) ne contribue en rien aux intégrales:

$$\int y'^2 \mathfrak{F}\, d\tau', \int z'^2 \mathfrak{F}\, d\tau', \int y' z' \mathfrak{F}\, d\tau',$$

mais, dans les intégrales

$$\int x'^2 \mathfrak{F}\, d\tau', \int x' y' \mathfrak{F}\, d\tau', \int x' z' \mathfrak{F}\, d\tau',$$

il introduit les termes

$$-2(V^2 - p^2)\,\mathfrak{m}_x, -(V^2 - p^2)\,\mathfrak{m}_y, -(V^2 - p^2)\,\mathfrak{m}_z. \quad (168)$$

Ce sont ces expressions qui joueront un rôle dans le résultat final. Tout ce que les autres termes de l'expression (167) fournissent aux intégrales dont il s'agit maintenant peut être négligé. En effet, nous admettrons que l'amplitude des vibrations n'est qu'une fraction insignifiante de la longueur d'onde et que, par conséquent, les fractions

$$\frac{\xi}{V}, \frac{\eta}{V}, \frac{\zeta}{V}$$

ont une valeur insensible.

En vertu de cette supposition, nous n'aurons pas à nous occuper des termes

$$-(\xi^2 + 2\xi p)\frac{\partial \varrho}{\partial x'}, -(\xi + p)\,\eta\,\frac{\partial \varrho}{\partial y'}, -(\xi + p)\,\zeta\,\frac{\partial \varrho}{\partial z'},$$

les parties correspondantes des intégrales cherchées étant extrêmement petites par rapport aux produits (168).

Quant au dernier terme de la formule (167), il introduit dans

$$\int x'^2 \mathfrak{F}\, d\tau', \int y'^2 \mathfrak{F}\, d\tau', \int z'^2 \mathfrak{F}\, d\tau'$$

les termes suivants:

$$\frac{d\xi}{dt}\int \varrho\, x'^2\, d\tau', \text{ etc.}$$

Désignons de nouveau, par δ l'amplitude et par ϑ la durée d'une vibration. Alors, les derniers termes sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{\delta^2}{\vartheta^2}\,\mathfrak{m}_x$$

et peuvent, par conséquent, être négligés par rapport aux expressions (168).

Le terme principal de l'expression (167) est donc bien le seul dont il faille tenir compte dans le calcul des intégrales

$$\int x'^2\, \mathfrak{F}\, d\,\tau', \text{ etc.}$$

et, dans le développement (164), il n'est pas nécessaire de nous occuper des dérivées d'un ordre supérieur au deuxième.

6. En résumant ce que nous venons de trouver, et en écrivant $\mathfrak{r}$ au lieu de $\mathfrak{r}_0$, on obtient:

$$f = -\frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}}\right) - \frac{e(V^2-p^2)}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) +$$

$$+\frac{e}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi^2}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi\eta}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi\zeta}{\mathfrak{r}}\right)\right] +$$

$$+\frac{pe}{L}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{r}}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right)\right] +$$

$$+\frac{V^2-p^2}{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{\mathfrak{r}}\right)\right].$$

Par un raisonnement que nous avons employé plusieurs fois (§ § 115 et 137), on démontre qu'il faut omettre le terme

$$-\frac{e(V^2-p^2)}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$$

si l'on veut obtenir la valeur de f qui est due à la molécule entière dont la particule vibrante fait partie. Cette valeur devient donc:

$$f = -\frac{1}{L}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{e}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi^2}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi\eta}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi\zeta}{\mathfrak{r}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{p}{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial S''}{\partial t}\right] + \frac{1}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right)\right] + \frac{V^2 - p^2}{L}\frac{\partial S''}{\partial x}, \text{ [1]} \quad \ldots\ldots (169)$$

où la fonction S'' est celle qui a été définie par la formule (144).

7. Pour que ce résultat s'accorde avec la première des équations (145), il faut qu'on néglige les termes

$$\frac{e}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\xi^2}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\xi\eta}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi\zeta}{\mathfrak{r}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z\dot{\xi}}{\mathfrak{r}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x\xi}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y\xi}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z\xi}{\mathfrak{r}}\right)\right] \quad \ldots (170)$$

Or, ces termes sont les seuls dans lesquels les moments $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ se trouvent multipliés par une des composantes de la vitesse vibratoire; on en diminuera les valeurs autant qu'on voudra en supposant suffisamment petites l'amplitude et la vitesse des vibrations.

Ce degré de petitesse nécessaire est-il atteint dans les cas qui se présentent en réalité? Pour répondre à cette question, nous considérerons de plus près l'ordre de grandeur des termes.

Remarquons d'abord qu'une différentiation par rapport à t introduit le facteur $\frac{1}{\vartheta}$. Au contraire, une différentiation par rapport à x donne lieu à deux termes différents. D'un côté, dans les fractions dont il s'agit, le dénominateur $\mathfrak{r}$ est une fonction de x, et, en ce qui regarde l'ordre de grandeur, les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)$ peuvent être rem-

[1]) Dans cette équation, les signes $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ représentent ce qui a été indiqué, au paragraphe 142, par $\mathfrak{m}'_x$, $\mathfrak{m}'_y$, $\mathfrak{m}'_z$.

placées par $\frac{1}{\mathfrak{r}^2}$. Mais, d'un autre côté, les numérateurs, tels que $\mathfrak{m}_x$ ou $\mathfrak{m}_x \xi$, dont les valeurs doivent être prises pour l'instant $t - \varkappa$, sont par cela même fonctions de x, y, z. Si on désigne par A un quelconque de ces numérateurs, on aura

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varkappa}{\partial x} (=) \frac{A}{\vartheta} \left[\frac{1}{\sqrt{V^2 - p^2}} \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x} + \frac{p}{V^2 - p^2} \right].$$

Cette dérivée se compose donc de deux parties, l'une de l'ordre

$$\frac{A}{\vartheta V}$$

et l'autre de l'ordre

$$\frac{A p}{\vartheta V^2}.$$

Si, dans l'expression (170), on omet pour un moment les termes de cette dernière catégorie, il ne reste que des quantités comparables à

$$\frac{1}{L\vartheta} \cdot \frac{\mathfrak{m} \frac{\delta}{\vartheta}}{\mathfrak{r}^2} = \frac{\mathfrak{m}\,\delta}{L\vartheta^2 \mathfrak{r}^2} \text{ et } \frac{1}{L\vartheta} \frac{\frac{\mathfrak{m}}{\vartheta V} \cdot \frac{\delta}{\vartheta}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{m}\,\delta}{L\vartheta^3 V \mathfrak{r}} \cdot \cdot \quad (171)$$

D'autre part, dans la première des formules (145), le premier terme donne lieu à des expressions qui sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{V^2 \mathfrak{m}}{L \mathfrak{r}^3}, \; \frac{V \mathfrak{m}}{L \vartheta \mathfrak{r}^2}, \; \frac{\mathfrak{m}}{L \vartheta^2 \mathfrak{r}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (172)$$

et le terme

$$-\frac{1}{L} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}} \right)$$

est du même ordre que la troisième de ces expressions.

En divisant la première des fractions (171) par chacune des fractions (172), on obtient

$$\frac{\delta \mathfrak{r}}{\lambda^2}, \; \frac{\delta}{\lambda}, \; \frac{\delta}{\mathfrak{r}},$$

λ étant la longueur d'onde ϑV, et la seconde des fractions (171) conduit de la même manière à

$$\frac{\delta \mathfrak{r}^2}{\lambda^3}, \; \frac{\delta \mathfrak{r}}{\lambda^2}, \; \frac{\delta}{\lambda}.$$

Il n'y a aucune difficulté à admettre que $\frac{\delta}{\lambda}$ et $\frac{\delta}{\mathfrak{r}}$ sont des fractions négligeables et que, par conséquent, les quantités (171) peuvent être négligées par rapport à celle des expressions (172) qui est la plus importante. Si, pour se mettre à l'abri de toute objection, on désire que les termes (171) soient très petits par rapport à chacun des termes (172), il faut que $\mathfrak{r}$ ou, ce qui revient presque à la même chose, la distance pour laquelle on veut calculer l'action d'une molécule, soit petit par rapport à

$$\sqrt{\frac{\lambda^3}{\delta}} = \lambda \sqrt{\frac{\lambda}{\delta}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (173)$$

Vu l'extrême petitesse de δ par rapport à λ, cette limite peut être un multiple très élevé de la longueur d'onde et dans la déduction des équations du mouvement on peut se borner à une partie du diélectrique, dont les dimensions soient beaucoup plus petites que la longueur (173). En effet, on se rappellera que nous n'avons rien supposé sur ce qui se trouve à l'extérieur de la surface σ (§ 123).

Quant aux termes dans l'expression (170) qui contiennent le facteur p, l'ordre de grandeur qu'ils présentent est déterminé par

$$\frac{\mathfrak{m}\, p\, \delta}{L\, \vartheta^3\, V^2\, \mathfrak{r}};$$

on démontre facilement qu'ils peuvent être négligés par rapport au terme:

$$\frac{p}{L}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{r}}\right) + \frac{\partial S''}{\partial t}\right\}$$

qui figure dans la première des formules (145).

8. Je n'insisterai pas sur la démonstration des deux autres formules (145), qui n'offrent rien de nouveau. Il suffira d'examiner encore la valeur d'une des composantes de la force magnétique. C'est la valeur de β que je choisirai, parce qu'elle est moins simple que l'expression pour α.

Il faut se servir maintenant de la deuxième des formules (165),

$$\beta = -\frac{1}{L}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int \mathfrak{B}\, d\tau' - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int x'\, \mathfrak{B}\, d\tau'\right] - \right.$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int y'\, \mathfrak{B}\, d\tau'\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int z'\, \mathfrak{B}\, d\tau'\right] +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\mathfrak{r}_0}\int x'^2 \mathfrak{B}\, d\tau'\right] + \ldots\right) \ldots \quad (174)$$

Or, en partant de la valeur

$$\mathfrak{B} = 4\pi V^2 \left\{ \zeta \frac{\partial \varrho}{\partial x'} - (\xi + p)\frac{\partial \varrho}{\partial z'} \right\},$$

on trouvera:

$$\int \mathfrak{B}\, d\tau' = 0,$$

$$\int x'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = -4\pi V^2 \zeta e = -4\pi V^2 \frac{d\,\mathfrak{m}_z}{dt},$$

$$\int y'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 0,$$

$$\int z'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 4\pi V^2 (\xi + p) e = 4\pi V^2 \left(\frac{d\,\mathfrak{m}_x}{dt} + p e\right),$$

$$\int x'^2\, \mathfrak{B}\, d\tau' = -4\pi V^2 . 2\,\mathfrak{m}_x \zeta,$$

$$\int y'^2\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 0,$$

$$\int z'^2\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 4\pi V^2 . 2\,\mathfrak{m}_z (\xi + p),$$

$$\int x' y'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = -4\pi V^2\, \mathfrak{m}_y \zeta,$$

$$\int y' z'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 4\pi V^2\, \mathfrak{m}_y (\xi + p),$$

$$\int x' z'\, \mathfrak{B}\, d\tau' = 4\pi V^2 \left[-\mathfrak{m}_z \zeta + \mathfrak{m}_x (\xi + p)\right].$$

En portant ces valeurs dans l'équation (174), on obtient:
1°. les termes qu'on voit dans la deuxième des formules (146);
2°. le terme

$$\frac{4\pi V^2}{L} p e \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right),$$

qui est indépendant du mouvement vibratoire et qui disparaîtra, par conséquent, dans la valeur de β produite par la molécule entière;

3°. le terme

$$\frac{4\pi V^2}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x \zeta}{\mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y \zeta}{\mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z \zeta}{\mathfrak{r}}\right)\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{m}_x \xi}{\mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y \xi}{\mathfrak{r}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z \xi}{\mathfrak{r}}\right)\right\}\right],$$

qu'on peut négliger pour les mêmes raisons qui ont conduit à l'omission des termes (170).

Détermination de la force qu'une particule vibrante éprouve en vertu de l'état de l'éther qu'elle excite elle-même.

9. Pour calculer cette action, il faut recourir de nouveau aux formules (159) et (160); cependant, on les simplifiera cette fois-ci en ayant égard à ce que $\varkappa$ est un intervalle de temps très court.

Commençons par rappeler les valeurs des fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, etc. En désignant maintenant par ϱ' la densité électrique et par $\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varrho'}{\partial y'}$, $\frac{\partial \varrho'}{\partial z'}$ les valeurs des dérivées pour l'instant $t-\varkappa$ et le point (x', y', z'), on peut écrire:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{F}(t-\varkappa, x', y', z') &= \left[V^2-(\xi+p)^2\right]\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}- \\
&\quad -(\xi+p)\eta\frac{\partial \varrho'}{\partial y'}-(\xi+p)\zeta\frac{\partial \varrho'}{\partial z'}+\dot{\xi}\varrho', \\
\mathfrak{G}(t-\varkappa, x', y', z') &= -(\xi+p)\eta\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}+(V^2-\eta^2)\frac{\partial \varrho'}{\partial y'}- \\
&\quad -\eta\zeta\frac{\partial \varrho'}{\partial z'}+\dot{\eta}\varrho', \\
\mathfrak{H}(t-\varkappa, x', y', z') &= -(\xi+p)\zeta\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}-\eta\zeta\frac{\partial \varrho'}{\partial y'}+ \\
&\quad +(V^2-\zeta^2)\frac{\partial \varrho'}{\partial z'}+\dot{\zeta}\varrho'.
\end{aligned}\right\} \quad (175)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}(t-\varkappa, x', y', z') &= 4\pi V^2 \left(\eta \frac{\partial \varrho'}{\partial z'} - \zeta \frac{\partial \varrho'}{\partial y'}\right),\\ \mathfrak{B}(t-\varkappa, x', y', z') &= 4\pi V^2 \left[\zeta \frac{\partial \varrho'}{\partial x'} - (\xi + p)\frac{\partial \varrho'}{\partial z'}\right],\\ \mathfrak{C}(t-\varkappa, x', y', z') &= 4\pi V^2 \left[(\xi + p)\frac{\partial \varrho'}{\partial y'} - \eta \frac{\partial \varrho'}{\partial x'}\right].\end{aligned}\right\} \quad (176)$$

Dans ces expressions, il faut entendre par ξ, η, ζ les composantes de la vitesse vibratoire à l'instant $t-\varkappa$. Mais, dans le cas qui nous occupe actuellement, les valeurs de $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ sont très petites par rapport à la longueur d'onde et le temps $\varkappa$ le sera par rapport à la durée d'une vibration.

Il est donc permis d'écrire

$$\xi = \xi_t - \varkappa \dot{\xi}_t,$$
$$\eta = \eta_t - \varkappa \dot{\eta}_t,$$
$$\zeta = \zeta_t - \varkappa \dot{\zeta}_t,$$

où l'indice t indique les valeurs relatives au temps t. De plus, les termes $\varkappa \dot{\xi}_t$, $\varkappa \dot{\eta}_t$, peuvent être traités comme des infiniments petits, ce qui nous donne:

$$(\xi + p)^2 = (\xi_t + p)^2 - 2\varkappa (\xi_t + p)\dot{\xi}_t, \text{ etc.}$$

C'est ainsi que tous les coefficients de $\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}$, etc. peuvent être exprimés en ξ_t, η_t, ζ_t, $\dot{\xi}_t$, $\dot{\eta}_t$, $\dot{\zeta}_t$. Pareillement, nous remplacerons $\dot{\xi}\varrho'$, $\dot{\eta}\varrho'$, $\dot{\zeta}\varrho'$ par $(\dot{\xi}_t - \varkappa \ddot{\xi}_t)\varrho'$, etc. Ensuite, les valeurs qu'on trouve pour $\mathfrak{F}(t-\varkappa, x', y', z')$, etc. doivent être portées dans les formules (159) et (160), et ce qu'on obtient pour $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ sera substitué à son tour dans les équations (I′) (§ 133). Il importe de remarquer que, dans ces dernières, les lettres ξ, η, ζ indiquent précisément ce que nous venons de représenter par ξ_t, η_t, ζ_t. Il est donc permis de supprimer l'indice t; de plus, nous simplifierons en réunissant les différents termes.

On a, par exemple,

$$\mathbf{X} = \int \varrho \left[4\pi V^2 f + \eta\gamma - \zeta\beta \right] d\tau$$

et

$$4\pi V^2 f + \eta\gamma - \zeta\beta = -\frac{1}{L}\int \frac{1}{\mathfrak{r}} \left[4\pi V^2 \mathfrak{F} + \eta\,\mathfrak{G} - \zeta\,\mathfrak{B} \right] d\tau',$$

où $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}$ sont les fonctions $\mathfrak{F}\,(t - \varkappa, x', y', z')$, etc. qui se trouvent déterminées par les formules (175) et (176).

Posons, pour abréger,

$$J_1 = \int \varrho \left(\int \frac{\varrho'}{\mathfrak{r}}\, d\tau' \right) d\tau, \qquad J_2 = \int \varrho \left(\int \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial \varrho'}{\partial x'}\, d\tau' \right) d\tau,$$

$$J_3 = \int \varrho \left(\int \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial \varrho'}{\partial y'}\, d\tau' \right) d\tau, \qquad J_4 = \int \varrho \left(\int \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial \varrho'}{\partial z'}\, d\tau' \right) d\tau$$

et indiquons par J'_1, J'_2, J'_3, J'_4 ce que deviennent ces intégrales si on y remplace $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ par $\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}$. Alors

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{X} = -\frac{4\pi V^2}{L} \Big\{ & \dot{\xi} J_1 + \left[V^2 - (\xi + p)^2 - \eta^2 - \zeta^2 \right] J_2 - \\
& - \ddot{\xi} J'_1 + \left[2(\xi + p)\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} \right] J'_2 + \\
& + (\xi + p)\dot{\eta} J'_3 + (\xi + p)\dot{\zeta} J'_4 \Big\}, \\
\mathbf{Y} = -\frac{4\pi V^2}{L} \Big\{ & \dot{\eta} J_1 + \left[V^2 - (\xi + p)^2 - \eta^2 - \zeta^2 \right] J_3 - \\
& - \ddot{\eta} J'_1 + \left[(\xi + p)\dot{\xi} + 2\eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta} \right] J'_3 + \\
& + \eta\dot{\zeta} J'_4 + \eta\dot{\xi} J'_2 \Big\}, \\
\mathbf{Z} = -\frac{4\pi V^2}{L} \Big\{ & \dot{\zeta} J_1 + \left[V^2 - (\xi + p)^2 - \eta^2 - \zeta^2 \right] J_4 - \\
& - \ddot{\zeta} J'_1 + \left[(\xi + p)\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + 2\zeta\dot{\zeta} \right] J'_4 + \\
& + \zeta\dot{\xi} J'_2 + \zeta\dot{\eta} J'_3 \Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (177)$$

10. Quelles sont maintenant les valeurs de J_1, J_2, etc.? Dans le calcul des intégrales $\int \frac{\varrho'}{\mathfrak{r}} d\tau'$ et $\int \frac{\varkappa \varrho'}{\mathfrak{r}} d\tau'$, il y a une difficulté: c'est que la lettre ϱ' indique la densité électrique qui existe dans le point (x', y', z') à l'instant $t-\varkappa$. Nous allons cependant transformer les expressions de façon qu'elles contiennent seulement la densité relative au temps t.

Remarquons d'abord que, sans changer la valeur des intégrales, on peut prendre pour origine des coordonnées le point (x, y, z) pour lequel elles doivent être calculées; de plus, pour une raison qu'on comprendra bientôt, j'écrirai x'', y'', z'' au lieu de x', y', z' et $d\tau''$ au lieu de $d\tau'$. Alors:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\frac{V^2}{V^2 - p^2} x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad \ldots \quad (178)$$

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{V^2 - p^2}} - \frac{p x''}{V^2 - p^2} \quad \ldots \ldots \quad (179)$$

et il s'agira des intégrales

$$\int \frac{\varrho'}{\mathfrak{r}} d\tau'' \text{ et } \int \frac{\varkappa \varrho'}{\mathfrak{r}} d\tau''. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (180)$$

Supposons que le point qui, à l'instant $t-\varkappa$, a les coordonnées x'', y'', z'' prenne part au mouvement vibratoire de la particule, et nommons x', y', z' ce que sont devenues les coordonnées à l'instant t. Le mouvement pouvant être regardé comme uniforme pendant le temps $\varkappa$, on a:

$$x' = x'' + \varkappa \xi, \; y' = y'' + \varkappa \eta, \; z' = z'' + \varkappa \zeta \quad \ldots \quad (181)$$

Ici, les rapports

$$\frac{\varkappa \xi}{x''}, \frac{\varkappa \eta}{y''}, \frac{\varkappa \zeta}{z''}$$

sont du même ordre de grandeur que

$$\frac{\xi}{V}, \frac{\eta}{V}, \frac{\zeta}{V}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (182)$$

on en pourra donc négliger les puissances supérieures à la première. Mais, alors, on peut, dans les relations (181), entendre

par $\varkappa$ ce que la fonction (179) devient si on y remplace x'', y'', z'' par x', y', z'.

Les points qui, à l'instant $t-\varkappa$, se trouvèrent dans un élément $d\tau''$, situé au point (x'', y'', z''), se trouveront, à l'instant t, dans un élément de volume $d\tau'$, situé au point (x', y', z').

Or, d'après un théorème bien connu,

$$\frac{d\tau''}{d\tau'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x''}{\partial x'}, & \frac{\partial y''}{\partial x'}, & \frac{\partial z''}{\partial x'} \\ \frac{\partial x''}{\partial y'}, & \frac{\partial y''}{\partial y'}, & \frac{\partial z''}{\partial y'} \\ \frac{\partial x''}{\partial z'}, & \frac{\partial y''}{\partial z'}, & \frac{\partial z''}{\partial z'} \end{vmatrix},$$

équation qu'on peut mettre sous la forme

$$d\tau'' = \left(1 - \xi \frac{\partial \varkappa}{\partial x'} - \eta \frac{\partial \varkappa}{\partial y'} - \zeta \frac{\partial \varkappa}{\partial z'}\right) d\tau',$$

parce que

$$\frac{\partial x''}{\partial x'} = 1 - \xi \frac{\partial \varkappa}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x''}{\partial y'} = -\xi \frac{\partial \varkappa}{\partial y'}, \text{ etc.}$$

et que

$$\xi \frac{\partial \varkappa}{\partial x'}, \ \xi \frac{\partial \varkappa}{\partial y'}, \text{ etc.}$$

sont du même ordre que les expressions (182).

11. Ceci établi, les intégrales (180) peuvent être transformées en d'autres auxquelles chaque élément $d\tau'$ contribue pour un terme. Seulement, dans les premières intégrales, il fallait entendre par $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ et $\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}$ les fonctions de x'', y'', z'' qu'on déduit des équations (178) et (179). Si on veut indiquer par ces signes les fonctions analogues de x', y', z', il faut remplacer $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ et $\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}$ par

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} - \varkappa \xi \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \varkappa \eta \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \varkappa \zeta \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right),$$

et

$$\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}} - \varkappa\,\xi\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right) - \varkappa\,\eta\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right) - \varkappa\,\zeta\,\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right).$$

Quant à ϱ', cette densité est évidemment égale à celle qui existe dans le point (x', y', z') à l'instant t.

On finira par trouver, pour les intégrales (180), qui ont été primitivement représentées par

$$\int \frac{\varrho'}{\mathfrak{r}}\,d\tau' \text{ et} \int \frac{\varkappa\,\varrho'}{\mathfrak{r}}\,d\tau', \quad \ldots\ldots\ldots \quad (183)$$

les formes suivantes:

$$\int \varrho' \left[\frac{1}{\mathfrak{r}} - \xi\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right) - \eta\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right) - \zeta\,\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}}\right)\right] d\tau' \quad (184)$$

et

$$\int \varrho' \left[\frac{\varkappa}{\mathfrak{r}} - \xi\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\varkappa^2}{\mathfrak{r}}\right) - \eta\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\varkappa^2}{\mathfrak{r}}\right) - \zeta\,\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\varkappa^2}{\mathfrak{r}}\right)\right] d\tau' \quad (185)$$

et cela restera encore vrai si, en revenant à une origine des coordonnées quelconque, on entend par x, y, z les coordonnées du point pour lequel on veut calculer $\int \frac{\varrho'}{\mathfrak{r}}\,d\tau'$, etc. et par x', y', z' celles du point où se trouve l'élément $d\tau'$.

Je simplifierai encore en négligeant des termes de l'ordre $\frac{p^2}{V^2}$. Alors, $\mathfrak{r}$ se confond avec la distance r des points (x, y, z) et (x', y', z'),

$$\varkappa = \frac{r}{V} + \frac{p\,(x - x')}{V^2}$$

et les expressions (184) et (185) deviennent

$$\int \varrho' \left[\frac{1}{r} - \frac{p}{V^2}\left\{\xi\,\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x - x'}{r}\right) + \eta\,\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{x - x'}{r}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \zeta\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x - x'}{r}\right)\right\}\right] d\tau'$$

et

$$\int \varrho' \left[\frac{1}{V} + \frac{p}{V^2}\,\frac{x - x'}{r} + \frac{\xi}{V^2}\,\frac{x - x'}{r} + \frac{\eta}{V^2}\,\frac{y - y'}{r} + \right.$$
$$\left. + \frac{\zeta}{V^2}\,\frac{z - z'}{r} + \frac{2\,p\,\xi}{V^3}\right] d\tau'.$$

En remplaçant ici ϱ' par $\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}, \frac{\partial \varrho'}{\partial y'}, \frac{\partial \varrho'}{\partial z'}$, on trouvera ce qui, dans les formules pour I_1, I_2, etc. est désigné par

$$\int \frac{1}{\mathfrak{r}} \frac{\partial \varrho'}{\partial x'} d\tau', \int \frac{\varkappa}{\mathfrak{r}} \frac{\partial \varrho'}{\partial x'} d\tau', \text{etc.}$$

En effet, ces dernières expressions peuvent être transformées de la même manière que les intégrales (183), et cela, parce que les dérivées de la densité par rapport aux coordonnées ont, dans le point (x', y', z') et à l'instant t, les mêmes valeurs qu'elles avaient au moment $t - \varkappa$, dans le point $(x'', y''. z'')$.

12. Le calcul de J_1, J_2, etc. est ainsi ramené à celui des intégrales

$$\iint \varrho \varrho' d\tau d\tau', \iint \frac{\varrho \varrho'}{r} d\tau d\tau', \iint \varrho \varrho' \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{x - x'}{r}\right) d\tau d\tau', \text{etc.}$$

Ici, les signes ϱ et ϱ' indiquent les densités électriques, relatives toutes les deux au même instant t et existant dans les points (x, y, z) et (x', y', z') de la particule. Tout ce qui dépend du mouvement de cette dernière a disparu et les valeurs des intégrales sont entièrement déterminées par la manière dont la charge est distribuée. De plus, plusieurs des intégrales s'annulent, puisque cette distribution est symétrique tout autour du centre. En effet, si ce dernier point est pris pour origine des coordonnées, ϱ et ϱ' seront des fonctions paires de x, y, z et de x', y', z' et une intégrale dans laquelle $\varrho \varrho'$ se trouve multiplié par une fonction impaire de $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ s'évanouira. Au contraire, vu que $\frac{\partial \varrho'}{\partial x'}$ est une fonction impaire de x', une intégrale qui contient $\varrho \frac{\partial \varrho'}{\partial x'}$ ne différera de 0 que lorsqu'elle contient encore un facteur qui est une fonction impaire de $x - x'$.

Voici maintenant les valeurs des intégrales, en tant qu'elles ne s'annulent pas. On a posé

$$-\frac{1}{4\pi V^2} \int \frac{\varrho'}{r} d\tau' = \omega, \quad \int \varrho \omega d\tau = \mu,$$

et il faut se rappeler que chaque combinaison de deux éléments $d\tau$ et $d\tau'$ doit être prise deux fois.

$$\iint \varrho\, \varrho'\, d\tau\, d\tau' = e^2,$$

$$\iint \frac{\varrho\, \varrho'}{r}\, d\tau\, d\tau' = -4\pi V^2 \mu,$$

$$\iint \varrho\, \varrho' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x-x'}{r}\right) d\tau\, d\tau' = -\iint \frac{\varrho\, \varrho'}{r}\, d\tau\, d\tau' +$$

$$+ \iint \varrho\, \varrho' \frac{(x-x')^2}{r^3}\, d\tau\, d\tau' = \frac{8}{3}\pi V^2 \mu,\ ^{1)}$$

$$\iint \varrho \frac{\partial \varrho'}{\partial x'} \frac{x-x'}{r}\, d\tau\, d\tau' = -\iint \varrho\, \varrho' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x-x'}{r}\right) d\tau\, d\tau' =$$

$$= -\frac{8}{3}\pi V^2 \mu,$$

$$\iint \varrho \frac{\partial \varrho'}{\partial y'} \frac{y-y'}{r}\, d\tau\, d\tau' = \iint \varrho \frac{\partial \varrho'}{\partial z'} \frac{z-z'}{r}\, d\tau\, d\tau' =$$

$$= -\frac{8}{3}\pi V^2 \mu.$$

De ces formules on déduit

$$J_1 = -4\pi\left(V^2 + \frac{2}{3}p\,\xi\right)\mu,\quad J'_1 = \left(\frac{1}{V} + \frac{2p\,\xi}{V^3}\right)e^2,$$

$$J_2 = 0,\ J_3 = 0,\ J_4 = 0,$$

$$J'_2 = -\frac{8}{3}\pi(\xi + p)\mu,\quad J'_3 = -\frac{8}{3}\pi\,\eta\,\mu,\quad J'_4 = -\frac{8}{3}\pi\,\zeta\,\mu.$$

13. Reste à substituer ces valeurs dans les formules (177). Je remplacerai L par $4\pi V^2$ et je considérerai en premier lieu

---

[1]) L'intégrale $\iint \varrho\, \varrho' \frac{(x-x')^2}{r^3}\, d\tau\, d\tau'$ est évidemment égale aux intégrales analogues qui contiennent $(y-y')^2$ et $(z-z')^2$ et, par conséquent, à la troisième partie de $\iint \frac{\varrho\, \varrho'}{r}\, d\tau\, d\tau'$.

la partie de **X** qui ne contient pas p. Les termes $-\dot{\xi} J_1$ et $+\ddot{\xi} J'_1$ deviennent

$$4\pi V^2 \dot{\xi} \mu + \frac{\ddot{\xi} e^2}{V}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (186)$$

ce qui est précisément l'expression (111). Les termes, au contraire, qui dépendent de J'_2, J'_3 et J'_4 sont insensibles. Le premier, par exemple, est $\frac{16}{3}\pi \xi^2 \dot{\xi} \mu$, ce qu'on peut négliger en présence de $4\pi V^2 \dot{\xi} \mu$.

Quant aux termes en p, il faudrait conserver sans doute ceux qui sont comparables au produit par $\frac{p}{V}$ de l'expression (186), c'est-à-dire des quantités du même ordre que

$$p V \dot{\xi} \mu \quad \text{et} \quad \frac{p \ddot{\xi} e^2}{V^2}.$$

Mais, dans la formule pour **X**, la vitesse p ne se trouve multipliée que par des facteurs comme

$$\xi \dot{\xi} \mu \quad \text{et} \quad \frac{\xi \ddot{\xi} e^2}{V^3}.$$

On peut donc se borner à la valeur (186), et on trouvera des expressions analogues pour **Y** et **Z**.

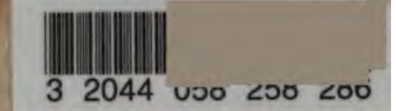
LEIDE, Juin 1892.

Table des matières.

CORRECTION.

Dans la note du paragraphe 50:

Au lieu de trois derniers *lisez* quatre derniers.



THE BORROWER WILL BE CHARGED AN OVERDUE FEE IF THIS BOOK IS NOT RETURNED TO THE LIBRARY ON OR BEFORE THE LAST DATE STAMPED BELOW. NON-RECEIPT OF OVERDUE NOTICES DOES NOT EXEMPT THE BORROWER FROM OVERDUE FEES.



